Topologie II

1. Axiomatische Homologie

4 Varianten:

„E"	„$\tilde{E}$"
auf Zellpaaren May §13.1 (b)	auf punktierten Zellkomplexen May §14.4 (b)
auf Raumpaaren May §13.1 (a)	auf wohlpunktierten Räumen May §14.4 (a)

– optionales Dimensionsaxiom ⇝ gewöhnliche Homologie-theorie

siehe Hatcher §2.3:

- Hatcher arbeitet nur mit Räumen, die homotopie-äquivalent zu Zellkomplexen sind, daher fehlt Unterscheidung zwischen 1. & 2. Zeile
- May definiert Funktoren auf Homotopiekategorien, Hatcher hat zusätzliches Homotopieinvarianz-Axiom.
- Tatsächlich hängt $\tilde{E}$ gar nicht von Basis-punkten ab, daher in Hatcher weggelassen.

1. Slogan: Jede der vier Varianten determiniert jede andere Variante.

2. Def.: Eine (verallgemeinerte) Homologietheorie E_* auf

Raumpaaren	Zellpaare

ist eine Familie von Funktoren

$E_n : \mathrm{HoTop} \longrightarrow \mathrm{Ab}$	$E_n : \mathrm{Ho}\,\mathrm{CW}^2 \longrightarrow \mathrm{Ab}$

$$\begin{tikzcd}
(X,A) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{[f]}"'] & E_n(X,A) \arrow[d, "f_*"] \\
(Y,B) \arrow[r, mapsto] & E_n(Y,B)
\end{tikzcd}$$

$$(X,\emptyset) \mapsto E_n(X)$$

(für alle $n \in \mathbb{Z}$) zusammen mit natürlichen Trafos

$$\partial_n : E_n(X,A) \longrightarrow E_{n-1}(A),$$

die folgenden Axiomen genügen:

(LES) Für jedes

Paar (X,A)	Zellpaar (X,A)

ist

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, rounded corners] \\
E_n(A) \arrow[r, "i_*"] & E_n(X) \arrow[r, "j_*"] & E_n(X,A) \arrow[dll, rounded corners, "\partial_n"'] \\
E_{n-1}(A) \arrow[r, "i_*"] & E_{n-1}(X) \arrow[r, "j_*"] & E_{n-1}(X,A) \arrow[dll, rounded corners] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}$$

exakt.

$$\left(A \xhookrightarrow{i} X, \quad (X,\emptyset) \xhookrightarrow{j} (X,A) \right)$$

„Das Kleine in das Große in das Relative“

(AUSSCHNEIDUNG) Für jede

schnittige Triade	Zelltriade
$(X; A, B)$	$(X; A, B)$

induziert die Inklusion $(A, A\cap B) \hookrightarrow (X, B)$

Isomorphismen $E_n(A, A\cap B) \xrightarrow{\cong} E_n(X, B)$

(ADDITIVITÄT) Die Inklusionen $(X_i, A_i) \xhookrightarrow{\iota_i} (\amalg X_i, \amalg A_i)$

induzieren Isomorphismen

$$\bigoplus E_n(X_i, A_i) \xrightarrow[\cong]{\oplus_i (\iota_i)_*} E_n(\amalg X_i, \amalg A_i)$$

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ)

Schwache Äquivalenzen $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ induzieren Isomorphismen $E_n(X, A) \xrightarrow{\cong} E_n(Y, B)$	(ergibt sich automatisch aus Satz von Whitehead)

optional: (DIMENSION)

Für gewöhnliche Homologietheorie soll zusätzlich gelten:

$$E_n(*) = 0 \quad \forall n \neq 0$$

Einpunktraum

3. Bemerkung:

Dass E_n Funktor auf $HoTop^2$ ist, impliziert insbesondere dass jede Homotopieäquivalenz von Paaren

$$(X,A) \xrightarrow{\simeq} (Y,B)$$

Isomorphismen $E_n(X,A) \xrightarrow{\cong} E_n(Y,B)$ induziert.

Axiom (SCHWACHE ÄQ.) ist Verschärfung dieser Aussage.

Erinnerung:

$$\begin{array}{ccccc} (X,A) & & (X,A) & & (X,A) \\ \downarrow\ \text{HÄ von Paaren} & \Longrightarrow & \downarrow\ \text{objektweise HÄ} & \Longrightarrow & \downarrow\ \text{schwache Äquivalenz} \\ (Y,B) & & (Y,B) & & (Y,B) \end{array}$$

$\Leftarrow$ Zellpaare, Kofaserpaare

$\Leftarrow$ Zellpaare

(objektweise definiert, siehe Top I, Def. 8.19)

4. Def.: Eine reduzierte Homologietheorie $\widetilde{E}_*$ auf

wohlpunktierten Räumen | punktierten Zellkomplexen (punktiert im Nullskelett)

ist eine Familie von Funktoren

$$\widetilde{E}_n : \underbrace{Ho\,Top_*}_{\text{wohlpunktierten Räume}} \longrightarrow Ab \quad \Big| \quad Ho\,CW_\bullet \longrightarrow Ab$$

zusammen mit natürlichen Isomorphismen

$$\sigma_n : \widetilde{E}_n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \widetilde{E}_{n+1}(\underbrace{\Sigma_\bullet}_{\text{reduzierte Einhängung}}(X, x_0)),$$

die folgenden Axiomen genügen:

(EXAKTHEIT)

Für jede Kofaserung $A \xhookrightarrow{i} X$ | Für jedes Zellpaar (A, X)

ist

$$\widetilde{E}_n A \xrightarrow{i_*} \widetilde{E}_n X \xrightarrow{q_*} \widetilde{E}_n(X/A)$$

(für $q : X \longrightarrow X/A$ die Quotientenabb.) exakt.

(ADDITIVITÄT) Die Inklusionen $X_i \xhookrightarrow{i_i} \bigvee_i X_i$ induzieren Isomorphismen

$$\bigoplus \widetilde{E}_n(X_i) \xrightarrow[\cong]{\bigoplus (i_i)_*} \widetilde{E}_n(\bigvee_i X_i).$$

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ)

Für jede schw. Äq. $X \longrightarrow Y$ ist $E_n X \longrightarrow E_n Y$ Iso. | (automatisch) optional: (DIMENSION) Für gewöhnliche reduzierte HT soll außerdem gelten: $\tilde{E}_n(S^0) = 0 \quad \forall n \neq 0$.

5. Def.: Die Gruppen $E_n(*)$ bzw. $\tilde{E}_n(S^0)$ sind die Koeffizienten der Theorie E bzw. $\tilde{E}$.

(Zelluläre Homologie ist bspw. gewöhnlich mit Koeffizienten $H_0(*) = \mathbb{Z}$.)

6. Def.: Sei E_* HT auf Paaren. Die assoziierten reduzierten Homologiegruppen eines nicht-leeren Raums X sind gegeben durch

$$\tilde{E}_n(X) := \ker\Big(E_n(X) \longrightarrow E_n(*)\Big)$$

$$X \longrightarrow *$$

7. Slogan 1, zweite Version

(A) Ist E_* HT auf Paaren, so def. $\tilde{E}_*$ wie in Def. 6 eine reduzierte HT.

(B) Aus einer reduzierten HT $\tilde{E}_*$ erhalten wir eine HT auf Paaren durch

reduzierter Homotopiequotient

$$E_n(X, A) := \tilde{E}_n\left(X/\!\!/^{h} A\right)$$

(Insbes. $E_n(X) = \tilde{E}_n(X_+)$)

(C) Aus HT auf Paaren / wohlpunkt. Räumen erhalten wir eine HT auf Zellpaaren / punktierten Zellkomplexen durch Einschränkung.

(D) Aus HT auf Zellpaaren / punktierten Zellkomplexen erhalten wir eine HT auf Paaren / wohlpunkt. Räumen durch zelluläre Approximierung.

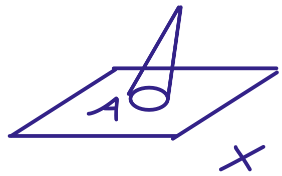
zu C & D: siehe Top I.

zu A & B: siehe unten

Notation & Erinnerung:

Homotopiequotient von Unterraum $i: A \longrightarrow X$ ist

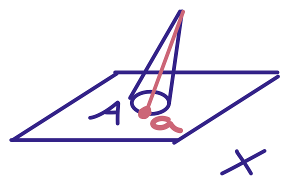
$$X/\!\!/^h A := C(i) \qquad \text{(Abb.-Kegel von } i\text{)}$$
$$= X \amalg_A CA$$



punktierte Variante:

Homotopiequotient von $i: (A,a) \longrightarrow (X,a)$

$$(X,a)/\!\!/^h (A,a) := C_\bullet(i)$$
$$= C(i) \big/ \{a\}\times I$$



$\Rightarrow$ = ein Punkt

Warum erhalten wir in A tatsächlich reduzierte HT?

8. Lemma: Sei E_* HT auf Paaren.

(a) $E_n(X) \cong \tilde{E}_n(X) \oplus E_n(*) \qquad \forall X \neq \emptyset$

(b) Die natürlichen Abb.

$$\tilde{E}_n(X) \longrightarrow \operatorname{coker}\left(E_n(\{x_0\}) \longrightarrow E_n(X)\right) \longrightarrow E_n(X, \{x_0\})$$

sind Isomorphismen, $\forall x_0 \in X$.

Beweis: Betrachte LES von $(X, \{x_0\})$. Ü

Vorübung: Blatt 1, Aufgabe 1:

1 | Kurz und klein

In der folgenden langen exakten Sequenz seien Morphismen σ_i gegeben, die die Morphismen α_i „spalten": es gelte $\sigma_i \alpha_i = \mathrm{id}$ für alle i.

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & M''_{i+1} \arrow[dll, "\partial_{i+1}"'] \\
M'_i \arrow[r, "\alpha_i", shift left] & M_i \arrow[l, dashed, "\sigma_i", shift left] \arrow[r, "\beta_i"] & M''_i \arrow[dll, "\partial_i"'] & \\
M'_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}", shift left] & \cdots \arrow[l, dashed, "\sigma_{i-1}", shift left] & &
\end{tikzcd}$$

Dann verschwinden alle ∂_i, und die kurzen exakten Sequenzen, die sich in jeder Zeile ergeben, sind isomorph zu den offensichtlichen kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to M'_i \to M'_i \oplus M''_i \to M''_i \to 0.$$

Insbesondere ist also zum Beispiel jeweils $M_i \cong M'_i \oplus M''_i$ und $M''_i \cong \ker \sigma_i$.

genauer kanonische Abb. $\ker(\sigma_i) \longrightarrow M_i''$ ist Iso.

Wegen $p \circ x_0 = \mathrm{id}$ für
$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "x_0"] & X \arrow[l, bend left, "p"] \end{tikzcd}$$

gilt auch $p_* \circ (x_0)_* = \mathrm{id}$, und dies spaltet die LES.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & E_n(*) \arrow[r, hook, "(x_0)_*"] & E_n(X) \arrow[l, dotted, bend left, "p_*"] \arrow[r] & E_n(X,*) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Aufgabe 1 zeigt also:
$$\begin{aligned} E_n(X,*) &\cong \operatorname{coker}\left((x_0)_*\right) \\ &\cong \ker(p_*) \end{aligned}$$

und $E_n(X) \cong E_n(*) \oplus E_n(X,*)$ $\square$

Paare vs Quotienten

Erinnerung (Top I, Korollar 6.11):

Für jede Kofaserung ist $X/A^h \xrightarrow{\simeq} X/A$ eine Homotopieäquivalenz.

9. Satz: Sei E_* HT auf Paaren.

Für jedes Paar (X,A) induzieren die Abb.

$$(X,A) \longrightarrow (X/A^h, CA) \longleftarrow (X/A^h, *)$$

Isomorphismen

$$E_n(X,A) \xrightarrow{\cong} E_n(X/A^h, *)$$

Insbesondere induziert für jedes Kofaserpaar die Quotientenabb.

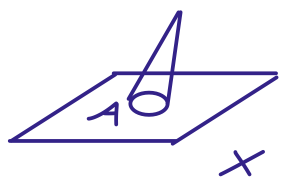
$$(X,A) \twoheadrightarrow (X/A, *)$$

Isomorphismen

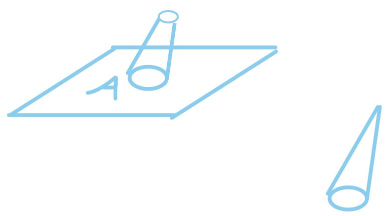
$$E_n(X,A) \xrightarrow{\cong} E_n(X/A, *)$$

Beweis:

$$X/A^h = X \amalg_A CA$$



$B := X \amalg_A A \times [0,\tfrac{1}{2}]$



$C := CA$

definiert eine schnittige Triade mit

$$B \cap C \cong A \times [0,\tfrac{1}{2}] \simeq A.$$

Wende nun (AUSSCHNEIDUNG) an. ü

Zeige zuerst, dass $(X,A) \hookrightarrow (X \cup_A CA, CA)$ Isos induziert:

$$\begin{tikzcd}
(X,A) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook, "\text{objektweise HÄ}"'] & & (X \cup_A CA, CA) \\
& (B, B \cap C) \arrow[ur, "\text{(AUSSCHNEIDUNG)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann folgt erste Aussage, daraus dass

$$(X \cup_A CA, CA) \hookleftarrow (X \cup_A CA, *)$$

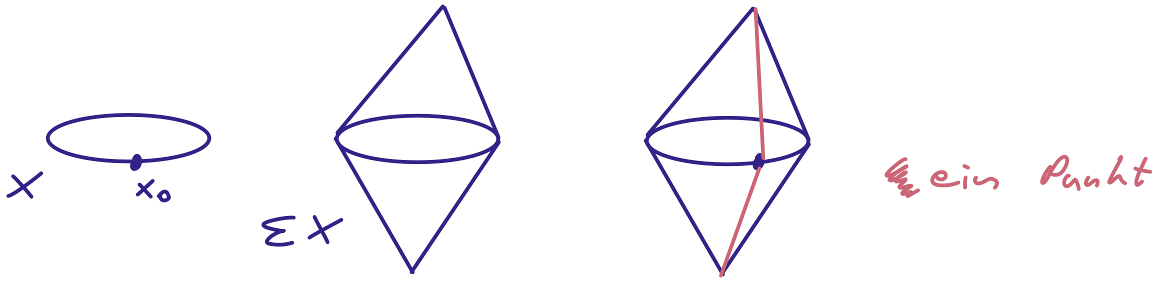
objektweise HÄ ist, und zweite Aussage daraus, dass

$$(X \cup_A CA, CA) \longrightarrow (X/A, *)$$

objektweise HÄ ist. $\square$

Einhängung

Erinnerung (Top I, Kor. 6.12): Für wohlpunktiertes (X, x_0) sind die unreduzierte ΣX Einhängung & reduzierte $\Sigma_\bullet(X, x_0)$ Einhängung homotopieäquivalent.



10. Satz (Einhängungsiso):
Sei (E_*, ∂) HT auf Paaren. Für jeden nicht-leeren Raum X haben wir natürliche Isomorphismen
$$\tilde{E}_n(X) \cong \tilde{E}_{n+1}(\Sigma X)$$
Ist (X, x_0) wohlpunktiert, so haben wir ebenso natürliche Isos
$$\tilde{E}_n(X) \cong \tilde{E}_{n+1}(\Sigma_\bullet X)$$

Beweis: Betrachte LES des Paares (CX, X) und benutze Satz 9. Ü

$$\begin{tikzcd}
E_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "p_*"'] & E_{n+1}(CX) \arrow[r, "0"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & E_{n+1}(CX, X) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & E_n(X) \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "p_*"'] & E_n(CX) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
& E_{n+1}(*) & E_{n+1}(\Sigma X, *) & & E_{n+1}(*)
\end{tikzcd}$$

(Satz 9)

zeigt:
$$\underset{\substack{\text{Lemma 8} \\ \cong \\ \tilde{E}_{n+1}(\Sigma X)}}{E_{n+1}(\Sigma X, *)} \cong \underset{\substack{\| \\ \tilde{E}_n(X)}}{\ker(p_*)}$$

$\square$

Beweis zu 7A:

Sei (E_*, ∂) HT auf Paaren, $\tilde{E}$ def. wie in Def. 5.

(EXAKTHEIT) Sei $A \rightarrowtail X$ Kofaserung wohlpunktierter Räume

Betrachte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_n(*) \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & E_n(A,*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_n(*) \arrow[r] \arrow[d] & E_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & E_n(X,*) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & E_n(X,A) \arrow[r] & E_n(X/A,*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Spalte 3 können wir nach Lemma 8 identifizieren mit $\tilde{E}_n(A) \longrightarrow \tilde{E}_n(X) \longrightarrow \tilde{E}_n(X/A)$.

Zu zeigen ist also: Spalte 3 ist exakt.

Hierzu:

- Diagramm kommutiert
- Zeilen lassen sich zu k.e.S. ergänzen – Warum?
- Spalten 1 & 2 sind exakt, – Warum?
  Spalte 3 ist ein Komplex – Warum?

Fasse Diagramm auf als kurze exakte Sequenz von Komplexen (setze Spalten nach oben und unten durch Nullen fort) und betrachte assoziierte lange exakte Homologiesequenz (siehe Vorlesung Homologische Algebra)

(oder: Diagrammjagd zu Fuß). Ü

(EINHÄNGUNG) — Satz 9

(ADDITIVITÄT) Ü

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_n\Big(\bigvee_i (X_i, x_i)\Big) &\overset{\text{Lemma 8}}{\cong} E_n\Big(\bigvee_i (X_i, x_i), *\Big) \\
&\cong E_n\Big(\amalg X_i / \amalg\{x_i\}, *\Big) \\
&\overset{\text{Satz 9}}{\cong} E_n\Big(\amalg X_i, \amalg\{x_i\}\Big) \\
&\overset{\substack{\text{(ADD.)} \\ \text{für } E_*}}{\cong} \bigoplus_i E_n(X_i, x_i) \\
&\cong \bigoplus_i \tilde{E}_n(X_i, x_i)
\end{aligned}
$$

Beachte: $\{x_i\} \rightarrowtail X_i$ Kofaserung nach Annahme

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ) (Ü)

$\square$

Beweis zu 7B:

Sei $(\widetilde{E}_*, \sigma)$ HT auf wohlpunktierten Räumen.

Definiere wie im Slogan

$$E_n(X,A) := \underset{\substack{\uparrow\\ \text{unreduzierten}\\ \text{Homotopieq.}}}{\widetilde{E}_n(X/\!\!/A)} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{reduzierten}\\ \text{Homotopie-}\\ \text{quotient}}}{\widetilde{E}_n(X_+/\!\!/A_+)}$$

$$\partial_n : \begin{array}{c} E_n(X,A) \\ \| \\ \widetilde{E}_n(X_+/\!\!/A_+) \end{array} \xrightarrow{} \widetilde{E}_n(\Sigma(A_+)) \underset{\sigma_n^{-1}}{\cong} \begin{array}{c} E_{n-1}(A) \\ \| \\ \widetilde{E}_{n-1}(A_+) \end{array}$$

teile X_+ heraus, vgl. Puppesequenz

(LES) Aus (EXAKTHEIT) erhalten wir für jede Abb. wohlpunktierter Räume $A \xrightarrow{f} X$ eine exakte Sequenz

$$\widetilde{E}_n(A) \longrightarrow \widetilde{E}_n(X) \longrightarrow \widetilde{E}_n(C_\bullet(f))$$

(Benutze hierzu Kofaserfaktorisierung

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \\ M_\bullet f \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[r] & C_\bullet f \end{tikzcd}$$

)

Ü Folgere nun (LES) aus Puppesequenz.

Sei Paar (X,A) gegeben.

1. $A_+ \longrightarrow X_+ \longrightarrow X_+/\!\!/A_+$ induziert exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{E}_n(A_+) & \longrightarrow & \widetilde{E}_n(X_+) & \longrightarrow & \widetilde{E}_n(X_+/\!\!/A_+) \\ \| & & \| & & \| \\ E_n(A) & & E_n(X) & & E_n(X,A) \end{array}$$

② $X_+ \xrightarrow{j} X_+/A_+{}^h \longrightarrow \Sigma_\cdot(A_+)$ induziert exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} X_+ \arrow[r, "j"] & X_+/A_+{}^h \arrow[r] \arrow[dr, "\text{teile } X_+ \text{ heraus}"'] & \Sigma_\cdot(A_+) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ & & C_\cdot j \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \tilde{E}_n(X_+) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{E}_n(X_+/A_+{}^h) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{E}_n(\Sigma_\cdot A_+) \arrow[d, "\cong\ \sigma"] \\ E_n(X) & E_n(X,A) \arrow[ddr, "\partial"'] & \tilde{E}_{n-1}(A_+) \arrow[d, equal] \\ & & E_{n-1}(A) \end{tikzcd}$$

③ ...

(ADDITIVITÄT)

Ü – Beachte für (X_1, A_1) und (X_2, A_2):

$$\frac{X_1 \sqcup X_2}{A_1 \sqcup A_2} \cong X_1/A_1 \vee X_2/A_2$$

$$\frac{X_1 \sqcup X_2}{A_1 \sqcup A_2}^h \cong X_1/A_1{}^h \vee X_2/A_2{}^h$$

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ)

$(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ schwache Äquivalenz heißt per Def., dass $X \longrightarrow Y$ und $A \longrightarrow B$ schwache Äquivalenzen sind.

Benutze also (LES) (oben bereits für E bewiesen) und 5er-Lemma. Ü

(AUSSCHNEIDUNG)

Sei $(X; A, B)$ schnittige Triade. Wähle zelluläre Approximierung $(\Gamma X; \Gamma A, \Gamma B)$ wie in Top. I, Satz 8.22. Dann sind

$$(\Gamma X, \Gamma B) \longrightarrow (X, B)$$
$$(\Gamma A, \Gamma A \cap \Gamma B) \longrightarrow (A, A \cap B)$$

schwache Äquivalenzen.

Ferner ist $\Gamma X / \Gamma B \cong \Gamma A / \Gamma A \cap \Gamma B$ (homöomorph)

– siehe Blatt 1, Aufgabe 2:

2 | Zellrechnung

In der Vorlesung wurde behauptet, für eine Zelltriade $(X; A, B)$ gelte stets

$$\frac{X}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}.$$

Allgemeiner gilt das für eine beliebige Überdeckung eines topologischen Raumes X durch zwei abgeschlossene Unterräume A, B.

Lösung: Wir haben stets stetige Bijektion

$$\bar{i} : B/A \cap B \longrightarrow X/A.$$

Da B abgeschlossen in X, ist $i : B \hookrightarrow X$ abgeschlossene Abb.
Da A abgeschlossen in X, ist $X \longrightarrow X/A$ abgeschlossene Abb.
Daraus folgt: $\bar{i}$ ist abgeschlossene Abb.
Also ist $\bar{i}$ Homöomorphismus. □

Weiteres Argument als Ü □

Weitere Konsequenzen der Axiome

11. Satz (LES eines Tripels)
Für jede HT auf Paaren und jedes Tripel $X \supseteq A \supseteq B$ ist folgende Sequenz exakt:

$$\cdots \to E_n(A,B) \to E_n(X,B) \to E_n(X,A) \xrightarrow{\partial'} E_{n-1}(A,B) \to \cdots$$

Hier sind die horizontalen Pfeile induziert durch die Inklusionen

$$(A,B) \hookrightarrow (X,B) \hookrightarrow (X,A)$$

und ∂' ist die Komposition

$$E_n(X,A) \xrightarrow{\partial} E_{n-1}(A) \xrightarrow[\text{(inkl.)}]{} E_{n-1}(A,B)$$

*

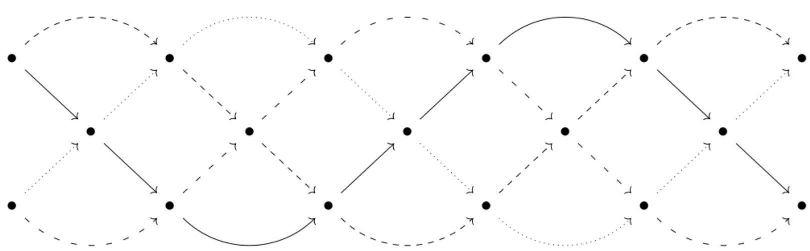
Beweis 1: Wähle CW-Approximierung $\Gamma X \supseteq \Gamma A \supseteq \Gamma B$ und betrachte LES von $\left(\Gamma X/\Gamma B,\ \Gamma A/\Gamma B\right)$

Ü

Beweis 2: Zopflemma. Ü

4 | Zopf

Ein Zopfdiagramm ist ein kommutatives Diagramm aus vier wie folgt ineinander verwobenen Kettenkomplexen abelscher Gruppen:



Sind in einem solchen Zopfdiagramm drei der vier Komplexe exakt, so ist auch der vierte Komplex exakt.

$\square$

12 Lemma: Ist E_* HT auf Paaren, so gilt das Axiom (AUSSCHNEIDUNG) auch für Zelltriaden.

Beweis: (ii) — Nutze Satz 9 & argumentiere wie in (AUSSCHNEIDUNG) im Beweis von 7B. $\square$

13 Satz (Mayer-Vietoris-Sequenz)

Sei E HT auf Paaren. Für jede Zelltriade und jede schnittige Triade $(X; A, B)$ ist folgende Sequenz exakt:

$$\cdots \to E_n(A\cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_{A*} \\ j_{B*} \end{pmatrix}} E_n(A) \oplus E_n(B) \xrightarrow{(i_{A*},\, -i_{B*})} E_n(X) \xrightarrow{\Delta} E_{n-1}(A\cap B)$$

Hier betrachten wir folgende Inklusionen

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "i_A"] & \\ A\cap B \arrow[ur, "j_A"] \arrow[dr, "j_B"'] & & X \\ & B \arrow[ur, "i_B"'] & \end{tikzcd}$$

und Δ ist die Komposition

$$E_n X \longrightarrow E_n(X, B) \underset{\text{AUSSCHN.}}{\cong} E_n(A, A\cap B) \xrightarrow{\partial} E_{n-1}(A\cap B)$$

Beweis für allgemeines E_*:

Approximiere gegenfalls schn. Triade durch Zelltriade.

Betrachte LES zu $(B, A\cap B)$ und (X,A):

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & E_n(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d] & E_n B \arrow[r] \arrow[d] & E_n(B, A\cap B) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\arrow[r] & E_n A \arrow[r] & E_n X \arrow[r] & E_n(X,A) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Ü

3 | Mayer-Vietoris

In folgender kommutativer Leiter seien die Zeilen exakt und jeder dritte vertikale Pfeil wie angedeutet ein Isomorphismus:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_i \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A_i \arrow[r] \arrow[d] & B_i \arrow[r] \arrow[d] & X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_i \arrow[r] & C_i \arrow[r] & D_i \arrow[r] & Y_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dann lässt sich eine lange exakte Sequenz basteln der Form

$$\cdots \to A_i \to B_i \oplus C_i \to D_i \to A_{i-1} \to \cdots .$$

$\square$