

Topologie II

1. Axiomatische Homologie

4 Varianten:

auf Zellpaaren "E"	May §13.1 (b)	auf punktierten Zellkomplexen "E"	May §14.4 (b)
auf Raumpaaren	May §13.1 (a)	auf wohlpunktierten Räumen	May §14.4 (a)

- optionales Dimensionaxiom \rightarrow gewöhnliche Homologietheorie

siehe Hatcher §2.3:

- Hatcher arbeitet nur mit Räumen, die homotopieäquivalent zu Zellkomplexen sind, daher fehlt Unterscheidung zwischen 1. & 2. Zeile
- May definiert Funktoren auf Homotopiekategorien, Hatcher hat zusätzliches Homotopieinvarianz-Axiom.
- Tatsächlich hängt \tilde{E} gar nicht von Basispunkten ab, daher in Hatcher weggelassen.

1. Slogan: Jede der vier Varianten determiniert jede andere Variante.

2. Def.: Eine (verallgemeinerte) Homologietheorie E_* auf
Raumpaaren | Zellpaare
ist eine Familie von Funktoren

$$\begin{array}{ccc}
E_n: \text{Ho Top} & \longrightarrow & \text{Ab} \\
(x, A) & \longmapsto & E_n(x, A) \\
\downarrow [f] & & \downarrow f_* \\
(y, B) & \longmapsto & E_n(y, B) \\
(x, \emptyset) & \longmapsto & E_n(x)
\end{array}
\quad \Bigg| \quad
\begin{array}{ccc}
E_n: \text{Ho CW}^2 & \longrightarrow & \text{Ab}
\end{array}$$

(für alle $n \in \mathbb{Z}$) zusammen mit natürlichen Transformations

$$\partial_n: E_n(x, A) \longrightarrow E_{n-1}(A),$$

die folgenden Axiomen genügen:

(LES) Für jedes

Paar (x, A) | Zellpaar (x, A)

ist

$$\begin{array}{c} \dots \\ \hookrightarrow E_n(A) \xrightarrow{i_*} E_n(x) \xrightarrow{j_*} E_n(x, A) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \partial_n \\ \hookrightarrow E_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} E_{n-1}(x) \xrightarrow{j_*} E_{n-1}(x, A) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \dots \\ \hookrightarrow \dots \end{array} \quad \text{exakt.}$$

$$(A \xleftarrow{i} x, (x, \emptyset) \xleftarrow{j} (x, A))$$

„Das Kleine in das Große in das Relative“

(AUSSCHNEIDUNG) Für jede

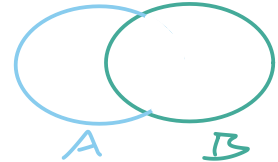
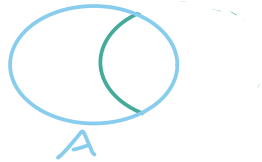
schnittige Triade
 $(X; A, B)$

Zelltriade

$(X; A, B)$

induziert die Inklusion $(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$

Isomorphismen $E_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} E_n(X, B)$



(ADDITIVITÄT) Die Inklusionen $(X_i, A_i) \xrightarrow{z_i} (\coprod X_i, \coprod A_i)$
 induzieren Isomorphismen

$$\bigoplus E_n(X_i, A_i) \xrightarrow[\cong]{\bigoplus_i (z_i)_*} E_n(\coprod X_i, \coprod A_i)$$

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ)

Schwache Äquivalenzen

$(X, A) \longrightarrow (Y, B)$

induzieren Isomorphismen

$E_n(X, A) \xrightarrow{\cong} E_n(Y, B)$

(ergibt sich automatisch
 aus Satz von Whitehead)

optional: (DIMENSION)

Für gewöhnliche Homologietheorie soll zusätzlich
 gelten:

$$E_n(*) = 0 \quad \forall n \neq 0$$

\uparrow
 Einpunktraum

3. Bemerkung:

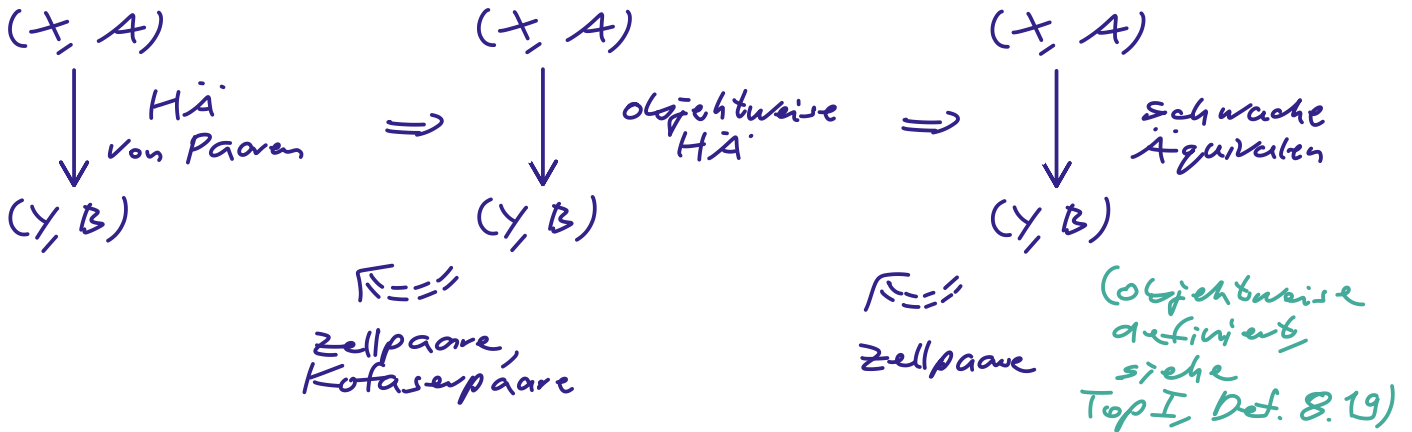
Dass E_n Funktor auf HoTop^2 ist, impliziert insbesondere, dass jede Homotopieäquivalenz von Paaren

$$(X, A) \xrightarrow{\cong} (Y, B)$$

Isomorphismen $E_n(X, A) \xrightarrow{\cong} E_n(Y, B)$ induziert.

Axiom (SCHWACHE ÄQ.) ist Verschärfung dieser Aussage.

Erinnerung:



4. Def.: Eine reduzierte Homologietheorie \tilde{E}_* auf
 wohlpunktieren Räumen | punktierten Zellkomplexen
 (punktiert im Nullskelett)

ist eine Familie von Funktoren

$$\tilde{E}_n: \text{Ho Top}_* \longrightarrow \text{Ab} \quad | \quad \text{Ho CW}_* \longrightarrow \text{Ab}$$

↑ wohlpunktierter Räume

zusammen mit natürlichen Isomorphismen

$$\sigma_n: \tilde{E}_n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \tilde{E}_{n+1}(\Sigma_*(X, x_0)),$$

↑ reduzierte Einhängung

die folgenden Axiome genügen:

(EXAKTHEIT)

Für jede Kofaserung
 $A \xrightarrow{i} X$

Für jedes Zellpaar
 (A, X)

ist

$$\tilde{E}_n A \xrightarrow{i_*} \tilde{E}_n X \xrightarrow{q_*} \tilde{E}_n (X/A)$$

(für $q: X \rightarrow X/A$ die Quotienten abb.) exakt.

(ADDITIVITÄT) Die Inklusionen $X_i \xrightarrow{z_i} \bigvee_i X_i$
 induzieren Isomorphismen

$$\bigoplus \tilde{E}_n(X_i) \xrightarrow[\cong]{\bigoplus (z_i)_*} \tilde{E}_n(\bigvee_i X_i).$$

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ)

Für jede schw. Äq.
 $X \rightarrow Y$

(automatisch)

ist

$$E_n X \rightarrow E_n Y \text{ Iso.}$$

optional: (DIMENSION) Für gewöhnliche reduzierte HT soll außerdem gelten: $\tilde{E}_n(S^0) = 0 \quad \forall n \neq 0.$

5. Def.: Die Gruppen $E_n(*)$ bzw. $\tilde{E}_n(S^0)$ sind die Koeffizienten der Theorie E bzw. \tilde{E} .

(Zelluläre Homologie ist bspw. gewöhnlich mit Koeffizienten $H_0(*) = \mathbb{Z}$.)

6. Def.: Sei E_* HT auf Paaren. Die assoziierten reduzierten Homologiegruppen eines nicht-leeren Raums X sind gegeben durch

$$\tilde{E}_n(X) := \ker \left(\begin{array}{ccc} E_n(X) & \longrightarrow & E_n(*) \\ X & \longrightarrow & * \end{array} \right)$$

7. Slogan 1, zweite Version

(A) Ist E_* HT auf Paaren, so def. \tilde{E}_* wie in Def. 6 eine reduzierte HT.

(B) Aus einer reduzierten HT \tilde{E}_* erhalten wir eine HT auf Paaren durch

$$E_n(X, A) := \tilde{E}_n \left(\frac{X}{A} \right)^h$$

reduzierter Homotopiequotient

(Insbes. $E_n(X) = \tilde{E}_n(X_+)$)

(C) Aus HT auf Paaren / wohlpart. Räumen erhalten wir eine

HT auf Zellpaaren / punktierten Zellkomplexen durch Einschränkung.

(D) Aus HT auf Zellpaaren / punktierten Zellkomplexen erhalten wir eine

HT auf Paaren / wohlpart. Räumen durch zelluläre Approximierung.

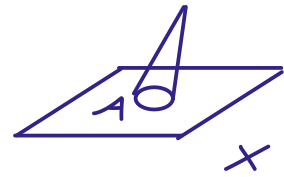
zu C & D: siehe Top I.

zu A & B: siehe unten

Notation & Erinnerung:

Homotopiequotient von Unterraum $z: A \rightarrow X$ ist

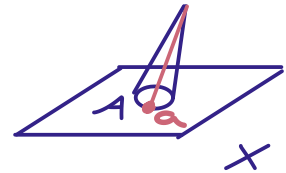
$$\begin{aligned} \frac{X}{A}^h &:= C(z) && (\text{Abb.-Kegel von } z) \\ &= X \amalg_A CA \end{aligned}$$



punktierte Variante:

Homotopiequotient von $z: (A, a) \rightarrow (X, x)$

$$\begin{aligned} \frac{(X, x)}{(A, a)}^h &:= C_\bullet(z) \\ &= \frac{C(z)}{\{a\} \times I} \end{aligned}$$



$a = \underline{\text{ein Punkt}}$

Warum erhalten wir in \textcircled{A} tatsächlich reduzierte HT?

8. Lemma: Sei E_x HT auf Paaren.

$$(a) E_n(X) \cong \tilde{E}_n(X) \oplus E_n(*) \quad \forall X \neq \emptyset$$

(b) Die natürlichen Abb.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n(X) &\longrightarrow \text{coker}(E_n(\{x_0\}) \longrightarrow E_n(X)) \\ &\longrightarrow E_n(X, \{x_0\}) \end{aligned}$$

sind Isomorphismen, $\forall x_0 \in X$.

Beweis: Betrachte LES von $(X, \{x_0\})$. $\textcircled{2}$

Vorübung: Blatt 1, Aufgabe 7:

1 | Kurz und klein

In der folgenden langen exakten Sequenz seien Morphismen σ_i gegeben, die die Morphismen α_i „spalten“: es gelte $\sigma_i \alpha_i = \text{id}$ für alle i .

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \cdots & \xrightarrow{\beta_{i+1}} & M''_{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \partial_{i+1} & & & & & \\ \longleftarrow & M'_i & \xrightarrow{\alpha_i} & M_i & \xrightarrow{\beta_i} & M''_i & \longrightarrow & \cdots \\ & & \longleftarrow \sigma_i & & & & & \\ \longleftarrow & M'_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & \cdots & & & & \\ & & \longleftarrow \sigma_{i-1} & & & & & \end{array}$$

Dann verschwinden alle ∂_i , und die kurzen exakten Sequenzen, die sich in jeder Zeile ergeben, sind isomorph zu den offensichtlichen kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow M'_i \rightarrow M'_i \oplus M''_i \rightarrow M''_i \rightarrow 0.$$

Insbesondere ist also zum Beispiel jeweils $M_i \cong M'_i \oplus M''_i$ und $M''_i \cong \ker \sigma_i$.

genauer kanonische Abb. $\ker(\sigma_i) \rightarrow M''_i$ ist Iso.

Wegen $p \circ x_0 = \text{id}$ für $* \xrightarrow{x_0} X$

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{x_0} & X \\ & \searrow p & \uparrow \end{array}$$

gilt auch $p_* \circ (x_0)_* = \text{id}$, und dies spaltet die LES.

$$\cdots \rightarrow E_n(*) \xrightarrow{(x_0)_*} E_n(X) \rightarrow E_n(X, *) \rightarrow \cdots$$

$\downarrow p_*$

Aufgabe 1 zeigt also:

$$\begin{aligned} E_n(X, *) &\cong \text{coker}((x_0)_*) \\ &\cong \ker(p_*) \end{aligned}$$

und

$$E_n(X) \cong E_n(*) \oplus E_n(X, *) \quad \square$$

Paare vs Quotienten

Erinnerung (Top I, Korollar 6.11):

Für jede Kofaserung ist $X/A^h \xrightarrow{\cong} X/A$ eine Homotopieäquivalenz.

9. Satz: Sei E_x HT auf Paaren.

Für jedes Paar (X, A) induzieren die Abb.

$$(X, A) \longrightarrow (X/A^h, CA) \longleftarrow (X/A^h, *)$$

Isomorphismen

$$E_n(X, A) \xrightarrow{\cong} E_n(X/A^h, *)$$

Insbesondere induziert für jedes Kofaserpaar die Quotientenabb.

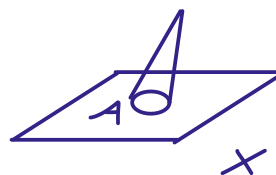
$$(X, A) \longrightarrow (X/A, *)$$

Isomorphismen

$$E_n(X, A) \xrightarrow{\cong} E_n(X/A, *)$$

Beweis:

$$X/A^h = X \amalg_A CA$$



$$B := X \amalg_A A \times [0, \frac{1}{2}]$$



$$C := CA$$



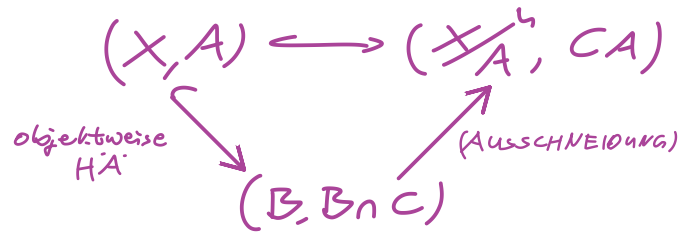
definiert eine schrittige Triade mit

$$B \cap C \cong A \times [0, \frac{1}{2}] \simeq A.$$

Wende nun (AUSSCHNEIDUNG) an.



Zeige zuerst, dass $(X, A) \longleftrightarrow (\overline{X/A}^h, CA)$ Isos induziert:



Dann folgte erste Aussage, daraus dass

$$(\overline{X/A}^h, CA) \longleftrightarrow (\overline{X/A}^h, *)$$

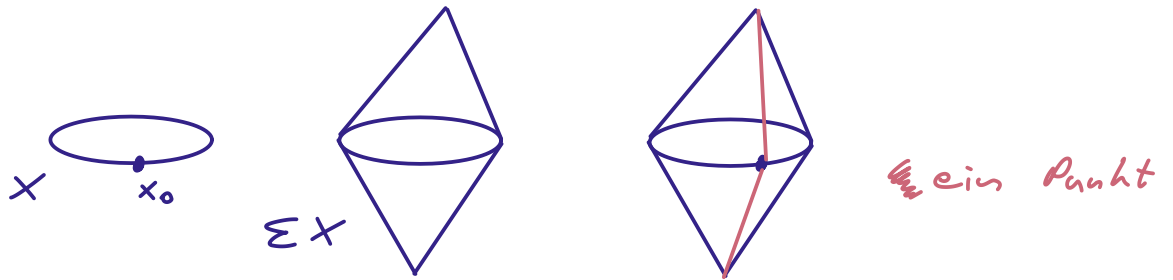
objektweise HÄ ist, und zweite Aussage daraus, dass

$$(\overline{X/A}^h, CA) \longrightarrow (\overline{X/A}^h, *)$$

objektweise HÄ ist. □

Einhängung

Erinnerung (Top I, Kor. 6.12): Für wohlpunktiertes (X, x_0) sind die unreduzierte & reduzierte ΣX Einhängung & $\Sigma_*(X, x_0)$ Einhängung homotopieäquivalent.



10. Satz (Einhängungsiso):

Sei (E_n, ∂) HT auf Paaren. Für jeden nicht-leeren Raum X haben wir natürliche Isomorphismen

$$\tilde{E}_n(X) \cong \tilde{E}_{n+1}(\Sigma X)$$

Ist (X, x_0) wohlpunktiert, so haben wir ebenso

natürliche Isos
$$\tilde{E}_n(X) \cong \tilde{E}_{n+1}(\Sigma_* X)$$

Beweis: Betrachte LES des Paares (CX, X) und benutze Satz 9. \square

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{n+1}(X) & \longrightarrow & E_{n+1}(CX) & \xrightarrow{0} & E_{n+1}(CX, X) & \longrightarrow & E_n(X) \longrightarrow E_n(CX) \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & E_{n+1}(*) & & E_{n+1}(\Sigma X, *) & & E_{n+1}(*) \\
 & & \text{(Satz 9)} & & & &
 \end{array}$$

zeigt:

$$\begin{array}{ccc}
 E_{n+1}(\Sigma X, *) & \cong & \ker(p_*) \\
 \text{Lemma 8} \parallel & & \parallel \\
 \tilde{E}_{n+1}(\Sigma X) & \cong & \tilde{E}_n(X)
 \end{array}$$

\square

Beweis zu ∇A :

Sei (E_*, ∂) HT auf Paaren, \tilde{E} def. wie in Def. 5.

(EXAKTHEIT) Sei $A \twoheadrightarrow X$ Kofaserung wohlpunktierter Räume

Betrachte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & E_n^*(*) & \longrightarrow & E_n^*(A) & \longrightarrow & E_n^*(A, *) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E_n^*(*) & \longrightarrow & E_n^*(X) & \longrightarrow & E_n^*(X, *) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & E_n^*(X/A) & \longrightarrow & E_n^*(X/A, *) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Spalte 3 können wir nach Lemma 8 identifizieren mit $\tilde{E}_n^*(A) \longrightarrow \tilde{E}_n^*(X) \longrightarrow \tilde{E}_n^*(X/A)$.

Zu zeigen ist also: Spalte 3 ist exakt

Hierzu:

- Diagramm kommutiert
- Zeilen lassen sich zu k.e.s. ergänzen - Warum?
- Spalten 1 & 2 sind exakt, - Warum?
- Spalte 3 ist ein Komplex - Warum?

Fasse Diagramm auf als kurze exakte Sequenz von Komplexen (setze Spalten nach oben und unten durch Nullen fort) und betrachte assoziierte lange exakte

Homologiesequenz (siehe Vorlesung Homologische Algebra)

(oder: Diagrammjagd zu Fuß).

τ_i

(EINHÄNGUNG) - Satz 9

(ADDITIVITÄT) (ii)

$$\tilde{E}_n(V_i(X_i, x_i)) \stackrel{\text{Lemma 8}}{\cong} E_n(V_i(X_i, x_i), *)$$
$$\cong E_n(\coprod X_i / \coprod \{x_i\}, *)$$

$$\stackrel{\text{Satz 9}}{\cong} E_n(\coprod X_i, \coprod \{x_i\})$$

$$\stackrel{\text{(ADD) für } E_n}{=} \bigoplus_i E_n(X_i, x_i)$$

$$\cong \bigoplus_i \tilde{E}_n(X_i, x_i)$$

Beachte: $\{x_i\} \rightarrow X_i$
Kofaserung nach
Annahme

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ) (ii)



Beweis zu 7B:

Sei (\tilde{E}_*, σ) HT auf wohlpunktigten Räumen.

Definiere wie im Slogan

$$E_n(X, A) := \tilde{E}_n\left(\frac{X}{A}^h\right) = \tilde{E}_n\left(\frac{X_+}{A_+}^h\right)$$

\uparrow
unreduziertes
Homotopieq.
 \uparrow
reduziertes
Homotopie-
quotient

$$\partial_n: E_n(X, A) \quad E_{n-1}(A)$$

$$\parallel \quad \parallel$$

$$\tilde{E}_n\left(\frac{X_+}{A_+}^h\right) \rightarrow \tilde{E}_n(\Sigma_+(A_+)) \cong_{\sigma_n^{-1}} \tilde{E}_{n-1}(A_+)$$

\downarrow
 teile X_+
 heraus,
 vgl. Puppesequenz

(LES) Aus (EXAKTHEIT) erhalten wir für jede Abb. wohlpunktigter Räume $A \xrightarrow{f} X$ eine exakte Sequenz

$$\tilde{E}_n(A) \rightarrow \tilde{E}_n(X) \rightarrow \tilde{E}_n(C_*(f))$$

(Benutze hierzu Kofaserfaktorisierung

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \cong & \nearrow \\ MF & \longrightarrow & C_*f \end{array}$$

ü Folge nun (LES) aus Puppesequenz.

Sei Paar (X, A) gegeben.

① $A_+ \rightarrow X_+ \rightarrow \frac{X_+}{A_+}^h$ induziert exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{E}_n(A_+) & \rightarrow & \tilde{E}_n(X_+) & \rightarrow & \tilde{E}_n\left(\frac{X_+}{A_+}^h\right) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ E_n(A) & & E_n(X) & & E_n(X, A) \end{array}$$

② $X_+ \xrightarrow{j} \frac{X_+}{A_+} \xrightarrow{h} \Sigma(A_+)$ induziert exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{E}_n(X_+) & \longrightarrow & \tilde{E}_n\left(\frac{X_+}{A_+}\right) & \longrightarrow & \tilde{E}_n(\Sigma(A_+)) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 E_n(X) & & E_n(X, A) & & E_{n-1}(A_+) \\
 & & \searrow \partial & & \parallel \\
 & & & & E_{n-1}(A)
 \end{array}$$

teile X_+ heraus

③ ...

(ADDITIVITÄT)

① - Beachte für (X_1, A_1) und (X_2, A_2) :

$$\frac{X_1 \amalg X_2}{A_1 \amalg A_2} \cong \frac{X_1}{A_1} \vee \frac{X_2}{A_2}$$

$$\frac{X_1 \amalg X_2}{A_1 \amalg A_2} \xrightarrow{h} \cong \frac{X_1}{A_1} \xrightarrow{h} \vee \frac{X_2}{A_2} \xrightarrow{h}$$

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ)

$(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ schwache Äquivalenz heißt per Def., dass $X \longrightarrow Y$ und $A \longrightarrow B$ schwache Äquivalenzen sind.

Benutze also (LES) (oben bereits für E bewiesen) und Ser-Lemma. ①

(Ausschneidung)

Sei $(X; A, B)$ schnittige Triade. Wähle zelluläre Approximierung $(\Gamma X; \Gamma A, \Gamma B)$ wie in Top. I, Satz 8.22. Dann sind

$$(\Gamma X, \Gamma B) \longrightarrow (\pm B)$$

$$(\Gamma A, \Gamma A \cap \Gamma B) \longrightarrow (A, A \cap B)$$

schwache Äquivalenzen.

Ferner ist
$$\frac{\Gamma X}{\Gamma B} \cong \frac{\Gamma A}{\Gamma A \cap \Gamma B} \quad (\text{Homöomorph})$$

— siehe Blatt 1, Aufgabe 2:

2 | Zellrechnung

In der Vorlesung wurde behauptet, für eine Zelltriade $(X; A, B)$ gelte stets

$$\frac{X}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}.$$

Allgemeiner gilt das für eine beliebige Überdeckung eines topologischen Raumes X durch zwei abgeschlossene Unterräume A, B .

Lösung: Wir haben stets stetige Bijektion

$$\bar{i}: B/A \cap B \rightarrow X/A.$$

Da B abgeschlossen in X ist $i: B \rightarrow X$ abgeschlossene Abb.

Da A abgeschlossen in X ist $X \rightarrow X/A$ abgeschlossene Abb.

Daraus folgt: \bar{i} ist abgeschlossene Abb.

Also ist \bar{i} Homöomorphismus. □

Weiteres Argument als

\bar{u}

□

Weitere Konsequenzen der Axiome

11. Satz (LES eines Tripels)

Für jede HT auf Paaren und jedes Tripel $X \geq A \geq B$ ist folgende Sequenz exakt:

$$\begin{array}{c} \hookrightarrow E_n(A, B) \rightarrow E_n(X, B) \rightarrow E_n(X, A) \rightarrow \\ \xrightarrow{\partial'} E_{n-1}(A, B) \end{array}$$

Hier sind die horizontalen Pfeile induziert durch die Inklusionen

$$(A, B) \hookrightarrow (X, B) \hookrightarrow (X, A)$$

und ∂' ist die Komposition

$$E_n(X, A) \xrightarrow{\partial} E_{n-1}(A) \xrightarrow{\text{(inkl.)} *} E_{n-1}(A, B)$$

Beweis 1: Wähle CW-Approximierung $\Gamma X \geq \Gamma A \geq \Gamma B$ und betrachte LES von $(\frac{\Gamma X}{\Gamma B}, \frac{\Gamma A}{\Gamma B})$

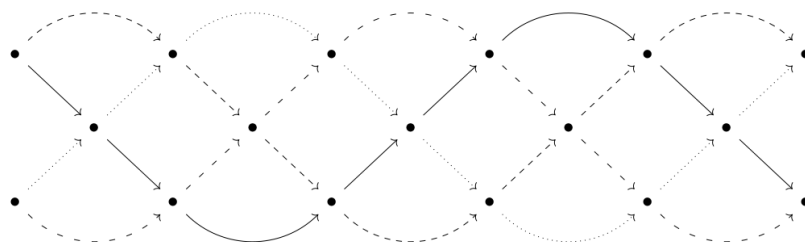
\ddot{u}

Beweis 2: Zopflemma.

\ddot{u}

4 | Zopf

Ein Zopfdiagramm ist ein kommutatives Diagramm aus vier wie folgt ineinander verwobenen Kettenkomplexen abelscher Gruppen:



Sind in einem solchen Zopfdiagramm drei der vier Komplexe exakt, so ist auch der vierte Komplex exakt.



12 Lemma: Ist E_X HT auf Paaren, so gilt das Axiom (Ausschneidung) auch für Zelltriaden.

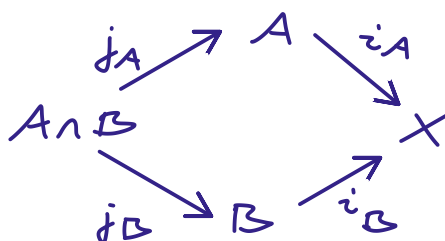
Beweis: (ii) - Nutze Satz 9 & argumentiere wie in (Ausschneidung) im Beweis von 7 B. □

13 Satz (Mayer-Vietoris-Sequenz)

Sei E HT auf Paaren. Für jede Zelltriade und jede schrittige Triade $(X; A, B)$ ist folgende Sequenz exakt:

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \curvearrowright E_n(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_A \\ j_B \end{pmatrix}} E_n(A) \oplus E_n(B) \xrightarrow{(i_A, -i_B)} E_n(X) \\
 \Delta \\
 \curvearrowleft E_{n-1}(A \cap B)
 \end{array}$$

Hier betrachten wir folgende Inklusionen



und Δ ist die Komposition

$$E_n X \longrightarrow E_n(X, B) \cong E_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial} E_n(A \cap B)$$

Ausschn.

Beweis für allgemeines E_x :

Approximiere gegebenenfalls schn. Triade durch Zelltriade.

Betrachte LES zu $(B, A \cap B)$ und (X, A) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & E_n(A \cap B) & \longrightarrow & E_n B & \longrightarrow & E_n(B, A \cap B) & \longrightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \longrightarrow & E_n A & \longrightarrow & E_n X & \longrightarrow & E_n(X, A) & \longrightarrow
 \end{array}$$

□

3 | Mayer-Vietoris

In folgender kommutativer Leiter seien die Zeilen exakt und jeder dritte vertikale Pfeil wie angedeutet ein Isomorphismus:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X_i & \longrightarrow & A_i & \longrightarrow & B_i & \longrightarrow & X_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\
 \cdots & \longrightarrow & Y_i & \longrightarrow & C_i & \longrightarrow & D_i & \longrightarrow & Y_{i-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Dann lässt sich eine lange exakte Sequenz basteln der Form

$$\cdots \rightarrow A_i \rightarrow B_i \oplus C_i \rightarrow D_i \rightarrow A_{i-1} \rightarrow \cdots$$

