

2. Zelluläre Homologie

Konstruktion in 2 Schritten:

$$\begin{array}{ccccc} H_0 CW & \longrightarrow & H_0 \text{Kom}_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{H_n} & Ab \\ X & \mapsto & (C_*(X), d_*) & \mapsto & H_n(X) := \frac{\ker(d \text{ auf } C_n)}{\text{im}(d \text{ auf } C_{n+1})} \end{array}$$

Für Konstruktion des zellulären Kettenkomplexes $C_*(X)$ gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- ① konstruiere irgendeine gewöhnliche Homologietheorie H_* , und konstruiere $C_*(X)$ aus H_*
 - siehe z.B. [Hatcher, §2.2],
 - vgl. §4 unten
- ② „direkte Konstruktion“ aus π_n
 - siehe [May, §13] / Top I, §10 / hier

Notation:

Sei X ein Zellkomplex. Dann ist

$$\frac{X^n}{X^{n-1}} \cong \bigvee_{\substack{n\text{-Zellen} \\ \text{von } X}} S^n$$

Für jede n -Zelle $j: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ haben wir:

(a)

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\overline{\partial_j}} & \frac{X^{n-1}}{X^{n-2}} \\ \partial_j \searrow & & \nearrow \text{Quotientenabb.} \\ & X^{n-1} & \end{array}$$

(b) $\overline{j}: S^n \xrightarrow{\cong} D^n / S^{n-1} \longrightarrow \frac{X^n}{X^{n-1}}$

(c) $\pi_j: \frac{X^n}{X^{n-1}} \longrightarrow D^n / S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^n$

$$\begin{array}{ccc} & \searrow & \\ & \frac{X^n}{X^{n-1}_j(D^n)} & \xrightarrow{\cong} S^n \end{array} \quad (\pi_j \circ \overline{j} = \text{id})$$

Hier ist $\nu: D^n / S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^n$ ein fest gewählter Homöomorphismus.

1. Def.: Der zelluläre Kettenkomplex $C_*(X)$ eines Zellkomplexes X ist gegeben durch

$$C_n(X) := \bigoplus_{\substack{n\text{-Zellen} \\ \text{von } X}} \mathbb{Z}$$

mit folgendem Differential:

Schreibe $[x] \in C_0(X)$ für das Basiselement, das $x \in X^0$ entspricht

$[f_j] \in C_n(X)$ für das Basiselement, das der n -Zelle $j: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ entspricht.

$$n=1: \quad d_1: C_1(X) \longrightarrow C_0(X) \\ [f_j] \longmapsto [j(1)] - [j(0)]$$

$$n>1: \quad d_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X) \\ [f_j] \longmapsto \sum_k d_{jk} [f_k]$$

(n-1)-Zellen

$$\text{mit } d_{jk} := \deg \left(S^{n-1} \xrightarrow[\partial_j]{X^{n-1}} \frac{X^{n-1}}{X^{n-2}} \xrightarrow{\pi_k} S^{n-1} \right)$$

Ist $f: X \longrightarrow Y$ eine zelluläre Abb., so ist der durch f induzierte Kettenkomorphismus

$$f_*: C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$$

gegeben durch:

$$n=0: \quad [x] \longmapsto [f(x)]$$

$$n>0: \quad [f_j] \longmapsto \sum_{\substack{n\text{-Zellen} \\ k \text{ von } Y}} f_{jk} [f_k]$$

mit

$$f_{jk} := \deg \left(S^n \xrightarrow[\partial_j]{X^n} \frac{X^n}{X^{n-1}} \xrightarrow{f} \frac{Y^n}{Y^{n-1}} \xrightarrow{\pi_k} S^n \right).$$

2. Satz: $(C_*(X), d)$ ist ein Kettenkomplex
(also $d \circ d = 0$)

und $f_*: (C_*(X), d) \rightarrow (C_*(Y), d)$ ist ein
Kettenhomomorphismus (also $f_* \circ d = d \circ f_*$).

Beweis: aufwendig, siehe May, § 13.2.

1. Def., Fortsetzung: Der zelluläre Kettenkomplex
 $C_*(X, A)$ eines Zellpaares (X, A) ist der Quotient

$$C_*(X, A) := \frac{C_*(X)}{C_*(A)}$$

(mit dem induzierten Differential). Der von einer
zellulären Abb. $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induzierte
Kettenhomomorphismus ist der induzierte
Morphismus auf diesen Quotienten.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_* A & \rightarrow & C_* X & \rightarrow & C_*(X, A) \rightarrow 0 \\ & & (f|_A)_* \downarrow & & (f_X)_* \downarrow & & f_* \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C_* B & \rightarrow & C_* Y & \rightarrow & C_*(Y, B) \rightarrow 0 \end{array}$$

Beachte: $C_*(X, \emptyset) = C_* X$

3. Def.: Die zelluläre Homologie [mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$] ist gegeben durch die Funktoren

$$\begin{array}{ccc} H_0 CW^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{H_n} & AB \\ & \searrow C_* & \nearrow H_n \\ & H_0 Kom_{\mathbb{Z}} & \end{array}$$

zusammen mit den Randabbildungen

$$\partial_n: H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A),$$

die sich aus den kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow C_0 A \longrightarrow C_0 X \longrightarrow C_0(A, X) \longrightarrow 0$$

ergeben — vgl. Homologische Algebras,

M4, Satz 6.

4. Def.: Sei allgemeiner R ein kommutativer Ring.

Zelluläre Homologie mit Koeffizienten

in R lässt sich konstruieren, indem

wir statt des gewöhnlichen zellulären

Kettenkomplexes $C_*(X)$ den Komplex

von R -Modulen $C_*(X; R) := C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Es ist also

$$C_n(X; R) \cong \bigoplus_{\substack{n\text{-Zellen} \\ \text{von } X}} R$$

das Differential hat dieselbe Form

wie zuvor, und

$$H_n(X; R) := H_n(C_*(X; R))$$

5. Beispiele

(Ü) Was ergibt sich für

$$X = \left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt} \\ S^1 \\ S^1 \times S^1 \\ S^n \\ D^n \\ \mathbb{C}P^n \\ \mathbb{R}P^n \end{array} \right. \quad \text{und} \quad R = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2 \\ \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

6. Satz: Zelluläre Homologie mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R ist eine gewöhnliche Homologietheorie auf Zellpaaren.

Beweisskizze (modulo Satz 2):

Wir konzentrieren uns auf $R = \mathbb{Z}$.

Als erstes ist zu zeigen:

C_* definiert Funktor $CW^2 \longrightarrow \text{Kom}_{\mathbb{Z}}$
[...].

Als zweites ist zu zeigen:

C_* definiert Funktor $\underbrace{H_0 CW^2}_{\cong} \longrightarrow \underbrace{H_0 \text{Kom}_{\mathbb{Z}}}_{\cong}$

Seien also $X \xrightleftharpoons[f]{f} Y$ homotope zelluläre Abb.

Wähle eine zelluläre Homotopie $H: X \times I \longrightarrow Y$ von f zu g (möglich nach Top. I, §8, Satz 16(b)).

7. Lemma: Für Zellkomplexe X und Y ist

$$C_*(X+Y) \cong C_*(X) \oplus C_*(Y)$$
 (als Kettenkomplexe).

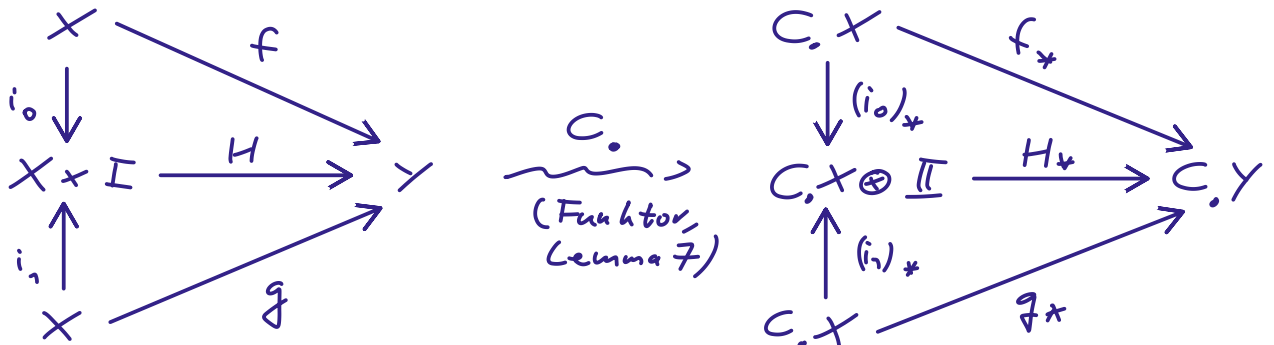
Beweis: $C_n(X+Z) \cong \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p,q \geq 0}} C_p(X) \oplus C_q(Z)$

ergibt sich aus Def. der Zellstruktur auf $X+Z$ (siehe Top I, §8, Satz 7). Wenn wir den Isomorphismus durch

$$(-1)^{p,q} [f \times k] \longleftarrow [C_f] \oplus [C_k]$$

definieren, kommutiert er mit Differentialen [...] – [May, §13.4]. $\triangle$

Nun ist $C_*(I) = \mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$



(ü) Benutze Homologische Algebra, Def. 14 & Satz 15, um zu folgern: f_* und g_* sind Kettenhomotop.

(ü) Beweisen Sie Homologische Algebra, Satz 15.

Nun zu den Axiomen:

(DIMENSION) (ü)

(LES) (ü)

(AUSSCHNEIDUNG)

8. Lemma: Für festes Zellpaar (X, A) induziert die Quotientenabb. $q: (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ ein Isomorphismus $q_*: C_*(X, A) \xrightarrow{\cong} C_*(X/A, *)$.

Beweis: Betrachte folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_* A & \xrightarrow{i_*} & C_* X & \rightarrow & C_*(X, A) \rightarrow 0 \\ & & (q|_A)_* \downarrow & & (q_X)_* \downarrow & & q_* \downarrow \\ 0 & \rightarrow & C_*(pt) & \xrightarrow{i_*} & C_*(X/A) & \rightarrow & C_*(X/A, *) \rightarrow 0 \end{array}$$

(Ü) Die von der Inklusion $i: A \hookrightarrow X$ induzierte Abb. $i_*: C_* A \rightarrow C_* X$ induziert Isomorphismen $\ker((q|_A)_*) \xrightarrow{\cong} \ker((q_X)_*)$ und $\operatorname{coker}((q|_A)_*) \xrightarrow{\cong} \operatorname{coker}((q_X)_*)$

(Rechne beide Kerne und Kokerne explizit aus.)

Zu Zellstruktur auf X/A , siehe Top I, § 8, Satz 7.

Beachte bei Kokernen Sonderfall $A = \emptyset$.)

(Ü) Folgere $\ker(q_*) = 0$ und $\operatorname{coker}(q_*) = 0$, also q_* Isomorphismus. $\triangle$

Aus Lemma 8 folgt insbesondere:

$$H_n(X, A) \xrightarrow{q_*} H_n(X/A, *).$$

(Ü) Benutze nun wieder $X/B \cong \frac{A}{A \cap B}$

für Zelltriaden $(X; A, B)$ (Blatt 0, Aufg. 2), um (AUSSCHNEIDUNG) zu beweisen.

(ADDITIVITÄT) (Ü)

□

zum Beweis von Satz 2:

Zu zeigen ist $df_* = f_* d$
und $dd = 0$.

Idee: Interpretiere

- $C_n(-)$ als Variante (Abelianisierung) von $\pi_n(-)$,
- f_* auf $C_n(-)$ als Variante von „ f_* “ = $\pi_n(f)$,
- d auf $C_n(-)$ als Variante von „ d_{top*} “ = $\pi_n(d_{top})$
für eine stetige Abb. d_{top} .

Dann reicht es, zu zeigen:

$$d_{top} \circ f \simeq f \circ d_{top}$$

und $d_{top} \circ d_{top} \simeq \text{konstante Abb.}$

Lemma: Für ein beliebiges Wedgeprodukt $\bigvee_I S^n$ ist

← gewöhnliche Homologie mit Koeff. in $\mathbb{Z}$

$$H_n(\bigvee_I S^n) \cong \bigoplus_I \mathbb{Z} \quad \text{für alle } n \geq 0$$

$$\pi_n(\bigvee_I S^n)^{ab} \cong \bigoplus_I \mathbb{Z} \quad \text{für alle } n \geq 1$$

↑
Abelianisierung

Beweis:

$$H_n = \ddot{U}$$

$$\pi_n^{ab} = \ddot{U}$$

$$n = 1:$$

$n = 2$: Falls I endlich, benutze:

• Topologie I 2 | Homotopiegruppen von Wedgesummen

Blatt 9 Seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte Räume.

- (a) Zeigen Sie $\pi_n(X \vee Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y, (x_0, y_0))$ für $n \geq 2$.
(Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete lange exakte Sequenz und zeigen Sie, dass diese spaltet. Warum benötigt dies $n \geq 2$?)
- (b) Finden Sie ein Beispiel im Fall $n = 1$, sodass die obige Aussage falsch ist.

• Top I, §8, Satz 15:

Ein relativer Zellkomplex, der nur Zellen der Dimension $> n$ besitzt, ist n -zusammenhängend.

Für beliebiges I , formuliere zunächst explizite Abb.

$$\pi_n(\bigvee_I S^n)^{ab} \longleftrightarrow \bigoplus_I \pi_n(S^n)$$

Benutze für Wohldrf. der Abb. $\longrightarrow$

Top.-I, § 8, Satz 5(c):

Jeder kompakte Unterraum eines Zellkomplexes
schneidet nur endlich viele Zellen.

Rechne explizit $\longrightarrow \circ \longleftarrow = \text{id}$ nach,

um zu zeigen, dass $\longrightarrow$ surjektiv ist.

Führe Injektivität von $\longrightarrow$ auf endlichen
Fall zurück.