

3. Hurewicz

Satz 1 (Hurewicz 0):

zelluläre Homologie



Für jeden Raum X ist

$$H_0 X \cong \bigoplus_{\pi_0 X} \mathbb{Z}$$

(und allgemeiner

$$H_0(X; \mathbb{R}) \cong \bigoplus_{\pi_0 X} \mathbb{R})$$

Beweis:

①

• $\in X$ Zellkomplex

• Beachte: Zellkomplex X lokal wegzusammenhängend,
daher Zusammenhangs komp. = Wegkomp.

$$\text{und } X = \coprod_{[x] \in \pi_0 X} [x]$$

□

2. Def: Der Hurewicz-Homomorphismus ist auf
punktiierten Räumen (X, x) gegeben durch

$$\begin{aligned} h: \pi_n(X, x) &\longrightarrow H_n X & (n \geq 1) \\ [f] &\longmapsto f_*[i_n] \end{aligned}$$

wobei i_n wie folgt def. ist:

Fixiere Erzeuger $i_0 \in \tilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$

Def. $i_n := \sum i_{n1} \in \tilde{H}_n(S^n) = H_n S^n (\cong \mathbb{Z})$
für $n \geq 1$.

3. Satz: Der Hurewicz-Homomorphismus ist

(a) ein Gruppenhomomorphismus

(b) natürlich und

(c) mit Einhängung verträglich.

Hier bedeuten (b) & (c):

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x) & \xrightarrow{h} & H_n X \\ g_* \downarrow & & g_* \downarrow \\ \pi_n(Y, y) & \xrightarrow{h} & H_n Y \end{array} \quad \text{Kommutiert für } \begin{array}{c} (X, x) \\ g \downarrow \\ (Y, y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x) & \xrightarrow{h} & H_n X \\ \Sigma \downarrow & & \Sigma \downarrow \\ \pi_{n+1}(\Sigma(X, x)) & \xrightarrow{h} & H_{n+1}(\Sigma X) \end{array} \quad \text{Kommutiert}$$

vgl. Top I, § 9 vgl. § 1, Satz 10

Beweis: Ü

zu a: Beschreibe $+$ auf π_n durch

Einsehung $p: S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$ und

Kodiagonale $\nabla: X \vee X \longrightarrow X$.

– vgl. Top I, § 7, Lemma 76, [May, § 15.1].

zu b: einfach

zu c: Nutze, dass Σ natürlich ist – vgl. § 1, Satz 10.

□

4. Satz (Hurewicz)

($n=1$) Für jeden zusammenhängenden punktierten Raum X ist

$$h: \pi_1(X, x) \longrightarrow H_1 X$$

die Abelianisierung.

($n \geq 2$) Sei X $(n-1)$ -zusammenhgd, d.h.

$$\pi_i(X, x) = 0 \quad \forall i < n, \quad \forall x \in X.$$

Dann ist auch

$$H_i X = 0 \quad \forall i < n$$

und

$$h: \pi_n(X, x) \longrightarrow H_n X$$

ist ein Isomorphismus.

Diese Aussage gilt allgemeiner für $(n-1)$ -zusammenhgd. Paare (X, A) anstelle von X .

5. Korollar: Falls X einfach-zusammenhängend ist

$$\begin{aligned} & \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \pi_n(X, x) \neq 0 \} \\ &= \min \{ n \in \mathbb{N} \mid H_n X \neq 0 \} \end{aligned}$$

Beweis: (Ü)

□

Beweisskizze zu Satz 4:

Fall $X = VS^n$ ($n \geq 1$)

(i) Rechne beide Seiten & Abb $\hookrightarrow$ explizit

aus: $n=1: * \mathbb{Z} \longrightarrow \oplus \mathbb{Z}$

$n \geq 2: \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \oplus \mathbb{Z}$

$[Erzeuger] \mapsto [Erzeuger]$

— vgl. Ende von §2.

Allgemeiner Fall — X ($n-1$) zusammenhngl.

• Ersetze $X \subseteq$ durch zelluläre Approximierung

mit $X^i = *$ für $i \leq n-1$

und

$$\begin{array}{ccc} VS^{i-1} & \longrightarrow & VD^i \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X^{i-1} & \longrightarrow & X^i \end{array}$$

— siehe explizite Konstruktion im Beweis
zu Top I, §8, Satz 18.

Insbesondere $X^n = VS^n$

• $\subseteq X = X^{n+1}$, denn:

(i) $X^{n+1} \hookrightarrow X$ induziert Isos auf π_n & H_n .

(Benutze für π_n Top I, §8, Satz 15,
für H_n zelluläre Konstruktion.)

Somit erhalten wir folgenden Pushout:

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{\mathcal{I}} S^n & \longrightarrow & \bigvee_{\mathcal{I}} D^{n+1} \\ \downarrow f & & \downarrow \\ \bigvee_{\mathcal{I}} S^n & \xrightarrow{g} & X \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ X^n & & X^{n+1} \end{array}$$

Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(\bigvee_{\mathcal{I}} S^n)^{ab} & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(\bigvee_{\mathcal{I}} S^n)^{ab} & \xrightarrow{g_*} & (\pi_n X)^{ab} \longrightarrow 0 \\ \cong \downarrow h & & \cong \downarrow h & & \downarrow h \\ H_n(\bigvee_{\mathcal{I}} S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(\bigvee_{\mathcal{I}} S^n) & \xrightarrow{g_*} & H_n X \longrightarrow 0 \end{array}$$

$\cong$: einfacher Fall, s.o.

Es reicht offenbar zu zeigen: beide Zeilen sind exakt. Dazu benutzen Sätze 5 & 6 unten:

- ① H_n -Zeile exakt — Satz 6
- ② $(-)^{ab}$ erhält Pushouts
(z.B.: $(-)^{ab}$ linksadj. zu $\text{Groups} \xleftarrow{\text{Vergiss}} \text{Ab.}$)
- ③ $\pi_n(-)^{ab}$ -Zeile exakt — Satz 5

Das schließt Beweis von Hurewicz für $n=1$ ab. Exaktheit von π_n -Zeile für $n \geq 2$ folgt aus Homotopieausscheidung — siehe [May, §11.1 und 15.1].

Relativer Fall: (X, A) $(n-1)$ -zusammenhgd.

— lässt sich mit Homotopieausscheidung auf absoluten Fall reduzieren □

Satz 5 (Seifert-van-Kampen für Pushouts):

Sei
$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_A} & A \\ i_B \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$
 ein Pushout entlang

einer Kofaserung i_A , mit A, B, C wegzusammenhängend. Dann ist das induzierte Quadrat

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 C & \xrightarrow{\quad} & \pi_1 A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1 B & \xrightarrow{\quad} & \pi_1 X \end{array}$$

(für jede Kohärente Wahl von Basispunkten) ebenfalls ein Pushout.

Satz 6 (Mayer-Vietoris für Pushouts):

Sei (E_*, ∂) verallgemeinerte Homologietheorie.

Sei
$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_A} & A \\ i_B \downarrow & & \downarrow j_A \\ B & \xrightarrow{j_B} & X \end{array}$$
 wie oben

ein Pushout entlang einer Kofaserung i_A . Dann haben wir eine lange exakte

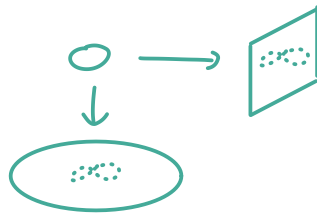
Sequenz
$$\begin{array}{ccccccc} & & \begin{pmatrix} i_{A*} \\ i_{B*} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} j_{A*} & -j_{B*} \end{pmatrix} & & E_{n+1} X \\ & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ E_n C & \xrightarrow{\quad} & E_n A \oplus E_n B & \xrightarrow{\quad} & E_n X & & \\ & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \\ & E_{n-1} C & & & & & \end{array}$$

Beweisidee zu Sätzen 5 & 6:

Def. Homotopiepushout / doppelten Abb.-Zylinder

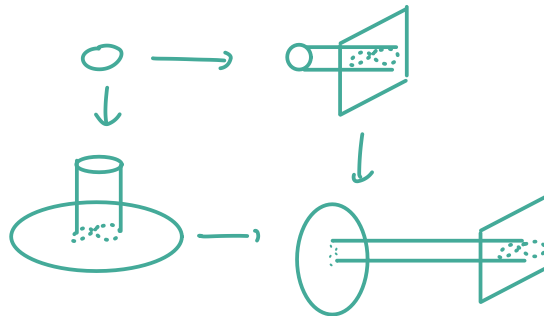
von

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_A} & A \\ i_B \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$



als

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & M(i_A) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ M(i_B) & \longrightarrow & M(i_A, i_B) \end{array}$$



Zeige: Ist i_A eine Kofaserung, so ist die kanonische Abb.

$$A \amalg_C B \longrightarrow M(i_A, i_B)$$

eine Homotopieäquivalenz.

– vgl. Top I, § 6, Korollar 11

= Spezialfall Homotopiequotient

Beweis: [May, § 10.7].

⊔ Sätze 5 & 6 ergeben sich aus üblichen Sätzen angewendet auf Homotopie-PO.

□

7. Korollar (aus Hurewicz): Homologie-Whitehead

Eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ zwischen einfach-
zusammenhängenden Zellkomplexen ist genau
dann eine Homotopieäquivalenz, wenn
 $f_*: H_n X \rightarrow H_n Y$ $\forall n$ ein Isomorphismus ist.

Beweis:

($\Rightarrow$) klar

($\Leftarrow$) (U)

- $\subseteq f$ Inklusion eines Unterraums $Y \hookrightarrow X$
- $H_n(X, Y) = 0 \quad \forall n$
- $\pi_n(X, Y) = 0 \quad \forall n$
- Nutze nun Satz von Whitehead
(Top I, § 8, Satz 15).

Siehe auch [Hatcher, Cor. 4.33].

