

5. Simplicziale Homologie

1. Def.: Die Kategorie $\triangle$ hat

Objekte: geordnete Mengen $[n] := \{0 < 1 < 2 \dots < n\}$
für $n \in \mathbb{N}_0$

Morphismen: ordnungserhaltende Abb. f
($i \leq j \Rightarrow f_i \leq f_j$)

2. Notation:

Für $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$:

$$[i_0, \dots, i_k] : [k] \longrightarrow [n]$$

$$j \mapsto i_j$$

Für $0 \leq i \leq n+1$:

$$\partial_i : [n] \longrightarrow [n+1]$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \circ & \longrightarrow & \circ 0 \\ \vdots & & \vdots \\ i-1 \circ & \longrightarrow & \circ i-1 \\ i \circ & \longrightarrow & \circ i \\ i+1 \circ & \longrightarrow & \circ i+1 \\ \vdots & & \vdots \\ n \circ & \longrightarrow & \circ n+1 \end{array}$$

Für $0 \leq i \leq n$:

$$[n] \longleftarrow [n+1] : \sigma_i$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \circ & \longleftarrow & \circ 0 \\ \vdots & & \vdots \\ i \circ & \longleftarrow & \circ i \\ i+1 \circ & \longleftarrow & \circ i+1 \\ \vdots & & \vdots \\ n \circ & \longleftarrow & \circ n+1 \end{array}$$

3. Satz:

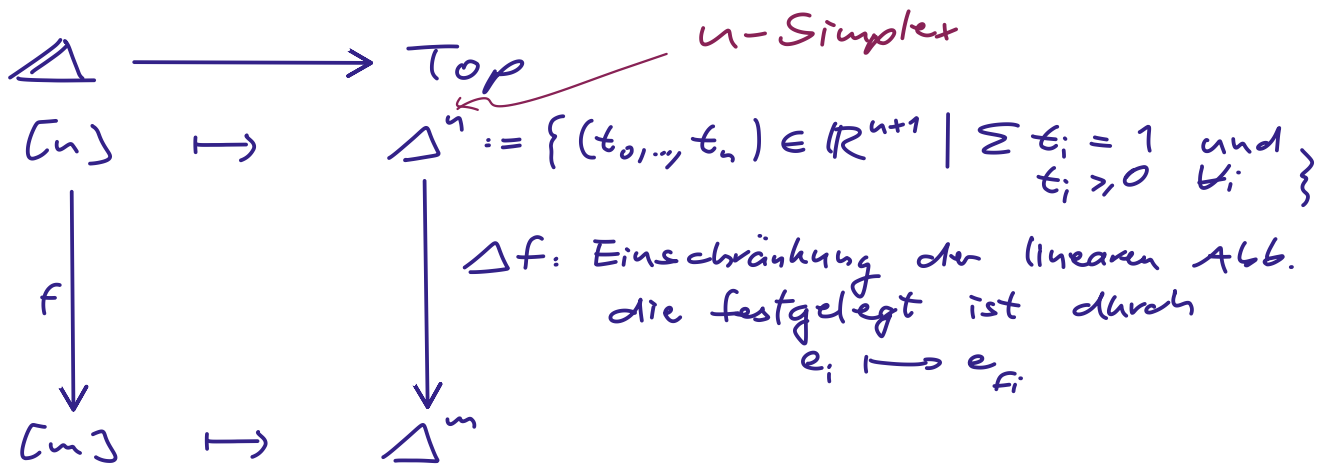
(a) Jeder Morphismus in $\triangle$ ist eine Komposition von ∂_i s und σ_i s.

(b) Die Abb. ∂_i & σ_i erfüllen die folgenden Kosimpliziale Identitäten:

$$\begin{aligned} \partial_j \circ \partial_i &= \partial_i \circ \partial_{j-1} & \text{für } i < j \\ \sigma_j \circ \partial_i &= \begin{cases} \partial_i \circ \sigma_{j-1} & \text{für } i < j \\ \text{id} & \text{für } i \in \{j, j+1\} \\ \partial_{i-1} \circ \sigma_j & \text{für } i > j+1 \end{cases} \\ \sigma_i \circ \sigma_j &= \sigma_j \circ \sigma_{i+1} & \text{für } i \leq j. \end{aligned}$$

□

4. Def./Notiz: Wir haben einen Funktor



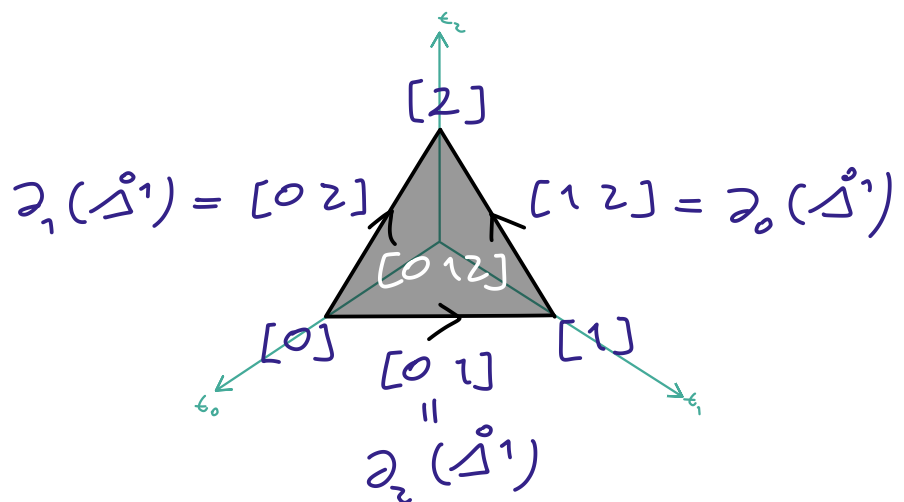
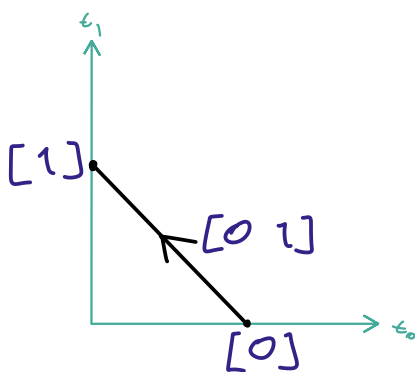
Wir schreiben in der Regel „f“ für Δf , insbesondere $\partial_i := \Delta \partial_i$, $\sigma_i := \Delta \sigma_i$ usw.

5. Def.: Das Innere von Δ^n ist gegeben durch

$$\overset{\circ}{\Delta}^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum t_i = 1 \text{ und } t_i > 0\}$$

Die offenen (simplicialen) Zellen von Δ^n sind die Teilmengen

$$[i_0, \dots, i_k] := [i_0, \dots, i_k](\overset{\circ}{\Delta}^n)$$



6. Notiz:

$$(a) \quad \Delta^n = \bigcup_k \bigcup_{i_0 < \dots < i_k} [i_0, \dots, i_k](\overset{\circ}{\Delta}^n)$$

(b) Δ^n besitzt eine Zellstruktur (im Sinne von Top I, §8), in der die charakteristischen Abb. durch

$$D^k \cong \Delta^k \xrightarrow{[i_0, \dots, i_k]} \Delta^n \quad \text{gegeben sind.}$$

Simpliziale Homologie

Da $\Delta^n \cong D^n$ können wir in der Def. von Zellkomplex D^n durch Δ^n ersetzen. Dann hat der Rand

$$\partial \Delta^n \cong \partial D^n \cong S^{n-1}$$

die zusätzliche Struktur, dass er eine Vereinigung von $(n-1)$ -Simplizes ist.

7. Def.:

(a) Ein Δ -Komplex ist ein Zellkomplex X , bei dem die Einschränkung der zu einer n -Zelle gehörigen char. Abb. $\Delta^n \xrightarrow{j} X$ auf die $(n-1)$ -Simplizes von $\partial \Delta^n$

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{\partial_i} \Delta^n \xrightarrow{j} X$$

wieder eine charakt. Abb. ist.

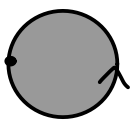
(b) Ein simplizialer Komplex ist ein Δ -Komplex, bei dem die Ecken $j(e_i)$ einer Zelle

$$\Delta^n \xrightarrow{j} X$$

alle verschieden sind, und je zwei verschiedene Zellen verschiedene Mengen von Ecken haben.

8. Beispiele

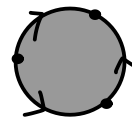
D^2 :



x
x

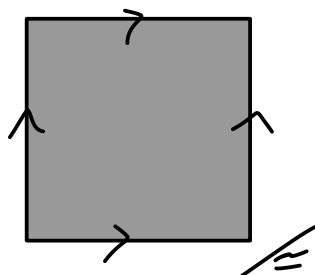


x
x

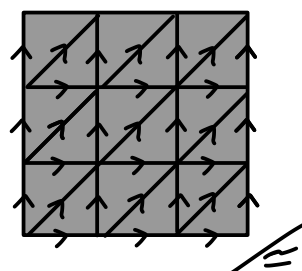


✓ Δ -Komplex
✓ simpl. Komplex

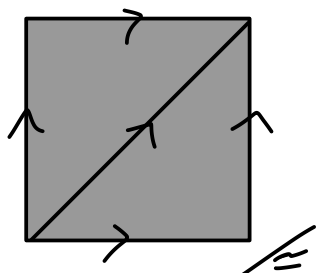
$S^1 \times S^1$:



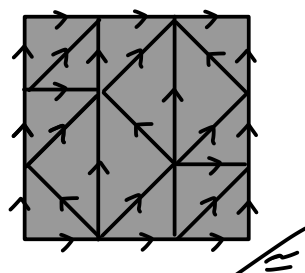
x
x



✓ Δ -Komplex
✓ simpl. Komplex



✓ Δ -Komplex
x



✓ Δ -Komplex
✓ simpl. Komplex

9. Bemerkung: I.A. gilt:

x Zellkomplex



x Δ -Komplex



x simplicialer Komplex



(aber auf die meisten Zellkomplexen existiert Δ -Komplex-Struktur)

Jede Struktur eines Δ -Komplexes lässt sich zu simplicialen Komplex verfeinern.

10. Def.: Der simpliciale Kettenkomplex $C_\bullet^\Delta(X)$ eines Δ -Komplexes X ist gegeben durch

$$C_n^\Delta(X) := \bigoplus_{\substack{n\text{-Zellen} \\ \text{von } X}} \mathbb{Z}$$

mit Differential

$$d: C_n^\Delta(X) \longrightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$$

$$[f] \longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [j \circ \partial_i]$$

Die simpliziale Homologie von X ist gegeben durch

$$H_n^\Delta(X) := H_n(C_\bullet^\Delta X, d).$$

(Ü) Prüfe für kleine Werte von n : $d \circ d = 0$.

11. Satz: Für Δ -Komplexe haben wir natürliche Isomorphismen

$$H_n^\Delta(X) \cong H_n X.$$

Beweiskizze 1:

Entwickle H^Δ weiter zu Homologietheorie auf Paaren. (DIMENSION) ist offensichtlich erfüllt. Benutze nun §4. (Beweise in §4 müssen dazu allerdings modifiziert werden, da H^Δ nur auf Δ -Komplexen definiert ist.)

Beweiskizze 2: Rechne explizit $C_\bullet^\Delta(X) \cong C_\bullet(X)$ nach. [...]

□