6. Künneth- & Koeffiziententheoreme

2 Fragen:

- Was haben $H_*(X;\mathbb{Q})$ oder $H_*(X;\mathbb{Z}/2)$ mit $H_*(X;\mathbb{Z})$ zu tun?
- Was hat $H_*(X\times Y)$ mit H_*X und H_*Y zu tun?

1. Erinnerung: $\mathrm{Tor}^R := \mathrm{Tor}_1^R$ für Hauptidealring R

Für Moduln M, M_j, N, N_j über einem Hauptidealring R gilt:

(a) $\mathrm{Tor}^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}^R(N,M)$

(b) $\mathrm{Tor}^R(\bigoplus_j M_j, N) \cong \bigoplus_j \mathrm{Tor}^R(M_j, N)$

$\mathrm{Tor}^R(M, \bigoplus_j N_j) \cong \bigoplus_j \mathrm{Tor}^R(M, N_j)$

(c) $\mathrm{Tor}^R(M,N)$ falls M oder N torsionsfrei

(d) $\mathrm{Tor}^R(R/d, N) \cong \underbrace{\ker(N \xrightarrow{\cdot d} N)}_{d\text{-Torsion von } N} \quad \forall d \in R\setminus\{0\}$

[siehe Hom. Alg., M5 Satz 13 & D2 Sätze 3 & 4]

2. Satz (Künneth für Homologie)

X, Y Räume, H_* gewöhnliche Homologie

Für Koeffizienten in einem Körper K haben wir einen Isomorphismus

$$\times : H_*(X) \otimes H_*(Y) \xrightarrow{\cong} H_*(X \times Y)$$

$H_*(X;k)$

Allgemeiner haben wir für Koeffizienten in einem HIR R für alle n eine natürliche k.e.S.

$$0 \to \bigoplus_{\substack{p,q:\\ p+q=n}} (H_pX \otimes H_qY) \xrightarrow{\times} H_n(X \times Y) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{p,q:\\ p+q=n-1}} \operatorname{Tor}^R(H_pX, H_qY) \to 0$$

Diese k.e.S. spalten sogar, d.h. $\exists$ Isomorphismus

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{\substack{p,q:\\ p+q=n}} (H_pX \otimes H_qY) \oplus \bigoplus_{\substack{p,q:\\ p+q=n-1}} \operatorname{Tor}^R(H_pX, H_qY),$$

aber diese Iso kann nicht natürlich gewählt werden.

3. Satz (Universelle Koeffizienten für Homologie)

X Raum, H_* gewöhnliche Homologie

Ist K ein Körper, M eine kommutative K-Algebra, so ist

$$H_*(X;K) \otimes_K M \cong H_*(X;M)$$

Ist allgemeinen R HIR, M kommutative R-Algebra, so haben wir für alle n eine natürliche k.e.S.

$$0 \to H_n(X;R) \otimes_R M \longrightarrow H_n(X;M) \longrightarrow \operatorname{Tor}^R(H_{n-1}(X;R), M) \to 0$$

Beispiel:

Ü noch einmal $H_*(S^1 + S^1; \mathbb{Z})$ berechnen.

Ü Noch einmal $H_*(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Q})$ und $H_*(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2)$ berechnen.

Plan:

- graduiertes $\otimes$ einführen
- Künneth-Theorem der homologischen Algebra
- Übersetzung in Sätze 2 & 3

Graduierte Moduln

R kommutativer Ring mit 1

4. Def.: Ein **graduierter R-Modul** ist ein R-Modul $M_\bullet$ mit einer Zerlegung

$$M_\bullet = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$$

in R-Untermoduln. Ein **Morphismus graduierter R-Moduln** ist eine R-lineare Abb.

$f: M_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ mit $f(M_n) \subseteq N_n \ \forall n$.

Elemente $m \in M_n$ heißen **homogen von Grad** n, geschrieben $|m| = n$.

Wir können graduierten Modul betrachten als Kettenkomplex mit $d = 0$. Für jeden Kettenkomplex $(M_\bullet, d_\bullet)$ ist

$$H_*(M_\bullet, d_\bullet) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(M_\bullet, d_\bullet)$$

ein graduierter Modul.

5. **Def.:** Das graduierte Tensorprodukt von grad. R-Moduln $M_\bullet$ & $N_\bullet$ ist gegeben durch das gewöhnliche Tensorprodukt (über R) zusammen mit folgender Zerlegung:

$$(M_\bullet \otimes N_\bullet)_n := \bigoplus_{\substack{p,q:\\ p+q=n}} M_p \otimes N_q$$

6. **Lemma:** Für beliebige Kettenkomplexe von R-Moduln $(M_\bullet, d)$ & $(N_\bullet, d)$ haben wir einen kanonischen Homomorphismus graduierter R-Moduln

$$\times : H_*(M_\bullet, d) \otimes H_*(N_\bullet, d) \longrightarrow H_*\big((M_\bullet, d) \otimes (N_\bullet, d)\big)$$

mit $\qquad [x] \otimes [y] \longmapsto [x \otimes y]$

Beweis:

Erinnerung: $\otimes$ von Komplexen gradweise genauso gegeben wie in Def. 5, mit Diff.

$$d(m \otimes n) := dm \otimes n + (-1)^{|m|} m \otimes dn$$

$d \circ d = 0$ auf $(M_\bullet, d) \otimes (N_\bullet, d)$, das Tensorprodukt ist also ein Komplex.

Zeige:

- $(dx = 0$ und $dy = 0) \Rightarrow d(x \otimes y) = 0$
- $[x] = 0$ oder $[y] = 0 \Rightarrow [x \otimes y] = 0.$ $\square$

7. Satz (Künneth-Theorem der homol. Algebra)

Sind $(X_\bullet, d)$ und $(Y_\bullet, d)$ Kettenkomplexe über einem Köper, so ist

$$\times : H_* X_\bullet \otimes H_* Y_\bullet \longrightarrow H_*(X_\bullet \otimes Y_\bullet)$$

ein Isomophismus. Sind $(X_\bullet, d)$ und $(Y_\bullet, d)$ allgemeiner Kettenkomplexe über einem Hauptidealring R, und ist jeder Modul X_q frei über R, so haben wir natürliche k.e.S.

$$0 \to \left[H_* X_\bullet \otimes_R H_* Y_\bullet\right]_n \xrightarrow{\times} H_n(X_\bullet \otimes Y_\bullet) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{p,q:\\ p+q=n-1}} \mathrm{Tor}^R(H_p X_\bullet, H_q Y_\bullet) \to 0$$

Falls auch jeder Modul Y_q frei über R, spaltet diese Sequenz (auf nicht-natürliche Weise).

Nachtrag

Beweis:

Betrachte zunächst $X_\bullet = \Sigma^p R^{\oplus p}$

$$:= (\ldots 0 \to 0 \to \underbrace{R^{\oplus p}}_{\substack{\text{freier Modul}\\ \text{von Rang } p\\ \text{in Grad } p}} \to 0 \to 0 \to \ldots)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}[H_*(X_\bullet) \otimes H_*(Y_\bullet)]_n &\cong R^{\oplus p} \otimes H_{n-p} Y \\ &\cong (H_{n-p} Y)^{\oplus p} \\ &\cong H_n(X_\bullet \otimes Y_\bullet)\end{aligned}$$

Ü Hier ist $\times$ ein Isomorphismus.

Ü Allgemeiner ist $\times$ ein Isomorphismus wann immer alle X_q frei sind und d auf $X_\bullet$ Null ist.

Betrachte für $X_\bullet$ mit beliebigem Differential die Komplexe $Z_\bullet$ mit $Z_q := \ker(d \text{ auf } X_q)$ & $B_\bullet$ mit $B_q := \mathrm{im}(d \text{ in } X_q)$, jeweils mit Differential Null. Wir haben also k.e.S.

$$0 \longrightarrow B_q \longrightarrow Z_q \longrightarrow H_q X \longrightarrow 0 \qquad (A)$$

Da R HIR ist und alle X_q frei sind, sind auch alle B_q und Z_q frei.

Sei $\Sigma B_\bullet$ der Komplex mit $(\Sigma B_\bullet)_n = B_{n-1}$.

Wir habe eine k.e.S von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow Z_\bullet \longrightarrow X_\bullet \longrightarrow \Sigma B_\bullet \longrightarrow 0 \qquad (B)$$

$$\left(\quad 0 \longrightarrow \ker d \hookrightarrow X_q \xrightarrow{d} \underset{\substack{\text{in} \\ X_{q-1}}}{\operatorname{im} d} \longrightarrow 0 \quad \right)$$

Tensoriere (B) mit $Y_\bullet$. Da alle B_q frei sind, erhalten wir k.e.S.

$$0 \longrightarrow Z_\bullet \otimes Y_\bullet \longrightarrow X_\bullet \otimes Y_\bullet \longrightarrow \Sigma B_\bullet \otimes Y_\bullet \longrightarrow 0$$

$\operatorname{Tor}^R(B_p, Y_q) = 0$

Hieraus erhalten wir eine lange exakte Homologie-sequenz:

$$\begin{tikzcd} & & H_{n+1}(\Sigma B_\bullet \otimes Y_\bullet) \arrow[dll, "\partial_{n+1}"'] \\ H_n(Z_\bullet \otimes Y_\bullet) \arrow[r] & H_n(X_\bullet \otimes Y_\bullet) \arrow[r] & H_n(\Sigma B_\bullet \otimes Y_\bullet) \arrow[dll, "\partial_n"] \\ H_{n-1}(Z_\bullet \otimes Y_\bullet) & & \end{tikzcd} \qquad (C)$$

Da Differentiale in $B_\bullet$ & $Z_\bullet$ Null sind, folgt aus Überlegung am Anfang:

$$H_{n+1}(\Sigma B_\bullet \otimes Y_\bullet) \cong \bigoplus_{\substack{p,q: \\ p+q=n}} B_p \otimes H_q Y_\bullet$$

$$H_n(Z_\bullet \otimes Y_\bullet) \cong \bigoplus_{\substack{p,q: \\ p+q=n}} Z_p \otimes H_q Y_\bullet$$

Ü Die Abb. ∂_{n+1} lässt sich identifizieren mit der direkten Summe über die Abb.

$$(\text{inkl.}) \otimes \mathrm{id} : B_p \otimes H_q Y_\bullet \longrightarrow Z_p \otimes H_q Y_\bullet$$

Tensorieren wir (A) mit $H_q Y_\bullet$, erhalten wir:

$$\mathrm{Tor}(Z_p, H_q Y_\bullet) = 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_p X_\bullet, H_q Y_\bullet) \longrightarrow B_p \otimes H_q Y_\bullet \xrightarrow[(\text{inkl.})\otimes \mathrm{id}]{} Z_p \otimes H_q Y_\bullet \longrightarrow H_p X \otimes H_q Y_\bullet \to 0$$

Das berechnet $\ker((\text{inkl.})\otimes \mathrm{id})$ und $\mathrm{coker}((\text{inkl.})\otimes \mathrm{id})$,
somit $\ker(\partial_n)$ und $\mathrm{coker}(\partial_{n+1})$.
Setze nun in (C) ein, um gewünschte Sequenz zu erhalten.

Spaltung: Nachtrag
siehe [Hatcher, Beweis von Thm 3B.5, letzter Absatz]

$\square$

Beweis zu Satz 2:
Wende Satz 7 an auf $C_\bullet(X;R)$ und $C_\bullet(Y;R)$, und beachte $C_\bullet(X \times Y) \cong C_\bullet(X) \otimes_R C_\bullet(Y)$ (§2, Lemma 7).

$\square$

Beweis zu Satz 3:
Wende Satz 7 an auf $C_\bullet(X;R)$ und

$$Y_\bullet : \quad \ldots \to 0 \to 0 \to 0 \to \underset{\text{Grad } 0}{M}$$

$\square$