

7. Axiomatische Kohomologie

1. Def.: Eine (verallgemeinerte) Kohomologietheorie E^* auf
Raumpaaren | Zellpaaren
ist eine Familie von Funktoren

$$E^n: \text{Ho Top} \longrightarrow \text{Ab}^{\text{op}} \quad \Bigg| \quad E_n: \text{Ho CW}^2 \longrightarrow \text{Ab}^{\text{op}}$$

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \mapsto & E_n(X, A) \\ [f] \downarrow & & \uparrow f^* \\ (Y, B) & \mapsto & E_n(Y, B) \\ (X, \emptyset) & \mapsto & E_n(X) \end{array}$$

(für alle $n \in \mathbb{Z}$) zusammen mit natürlichen Transform.

$$E^n(X, A) \xleftarrow{\partial^n} E^{n-1}(A),$$

die folgenden Axiomen genügen:

(LES) Für jedes

$$\begin{array}{ccc} \text{Paar } (X, A) & | & \text{Zellpaar } (X, A) \\ \text{ist} & & n+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \dots \xleftarrow{\partial^n} E^n(A) \xleftarrow{i^*} E^n(X) \xleftarrow{j^*} E^n(X, A) \xleftarrow{\partial^n} E^{n-1}(A) \xleftarrow{i^*} E^{n-1}(X) \xleftarrow{j^*} E^{n-1}(X, A) \xleftarrow{\partial^{n-1}} E^{n-2}(A) \xleftarrow{i^*} E^{n-2}(X) \xleftarrow{j^*} E^{n-2}(X, A) \xleftarrow{\partial^{n-2}} \dots \end{array}$$

exakt.

$$\left(A \xrightarrow{i} X, (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A) \right)$$

(AUSSCHNEIDUNG) Für jede

schnittige Triade
 $(X; A, B)$

Zelltriade

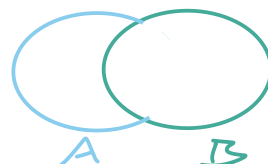
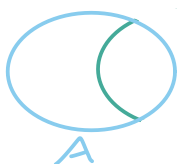
$(X; A, B)$

induziert die Inklusion

$$(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$$

Isomorphismen

$$E^n(A, A \cap B) \xleftarrow{\cong} E^n(X, B)$$



(ADDITIVITÄT) Die Inklusionen $(X_i, A_i) \xrightarrow{z_i} (\coprod X_i, \coprod A_i)$ induzieren Isomorphismen

$$\prod_i E^n(X_i, A_i) \xleftarrow{\cong} E^n(\coprod X_i, \coprod A_i)$$

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ)

Schwache Äquivalenzen

$$(X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

induzieren Isomorphismen

$$E^n(X, A) \xleftarrow{\cong} E^n(Y, B)$$

(ergibt sich automatisch aus Satz von Whitehead)

optional: (DIMENSION)

Für gewöhnliche Kohomologietheorie soll zusätzlich gelten:

$$E^n(*) = 0 \quad \forall n \neq 0$$

↑ Einpunktraum

2. Def.: Eine reduzierte Kohomologietheorie $\tilde{E}^*$ auf
 wohlpunktuierten Räumen | punktierten Zellkomplexen
 (punktuiert im Nullskelett)
 ist eine Familie von Funktoren

$$\tilde{E}^n: \text{Ho Top}_* \longrightarrow \text{Ab}^{\text{op}} \quad \Bigg| \quad \text{Ho CW}_* \longrightarrow \text{Ab}^{\text{op}}$$

↑ wohlpunktuierte Räume

zusammen mit natürlichen Isomorphismen

$$\sigma: \tilde{E}^n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \tilde{E}^{n+1}(\Sigma_*(X, x_0)),$$

↑ reduzierte Einhängung

die folgenden Axiome genügen:

(EXAKTHEIT)

Für jede Kofaserung
 $A \hookrightarrow X$

Für jedes Zellpaar
 (A, X)

ist

$$\tilde{E}^n A \xleftarrow{i^*} \tilde{E}^n X \xleftarrow{q^*} \tilde{E}^n (X/A)$$

(für $q: X \rightarrow X/A$ die Quotienten abb.) exakt.

(ADDITIVITÄT) Die Inklusionen $X_i \hookrightarrow \bigvee_i X_i$
 induzieren Isomorphismen

$$\prod_i \tilde{E}^n(X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{E}^n(\bigvee_i X_i).$$

(SCHWACHE ÄQUIVALENZ)

Für jede schw. Äq.

$$X \rightarrow Y$$

(automatisch)

ist

$$\tilde{E}^n X \hookrightarrow \tilde{E}^n Y \text{ Iso.}$$

optional: (DIMENSION) Für gewöhnliche reduzierte KT soll außerdem gelten: $\tilde{E}^n(S^0) = 0 \quad \forall n \neq 0$.

3. Def.: Sei E^* KT auf Paaren. Die assoziierten reduzierten Kohomologiegruppen eines nicht-leeren Raums X sind gegeben durch

$$\tilde{E}^n(X) := \text{coker} \left(E^n(X) \xleftarrow{\quad} E^n(*) \right)$$

$X \xrightarrow{\quad} *$

4. Slogan

(A) Ist E^* KT auf Paaren, so def. $\tilde{E}^*$ wie in Def. 3 eine reduzierte KT.

(B) Aus einer reduzierten KT $\tilde{E}^*$ erhalten wir eine KT auf Paaren durch

$$E^n(X, A) := \tilde{E}^n\left(\frac{X}{A}^h\right)$$

reduzierter Homotopiequotient

$$(\text{Insbes.} \quad E^n(X) = \tilde{E}^n(X_+)) \quad /$$

(C) Aus KT auf Paaren / wohlpunkt. Räumen erhalten wir eine

KT auf Zellpaaren / punktierten Zellkomplexen durch Einschränkung.

(D) Aus KT auf Zellpaaren / punktierten Zellkomplexen erhalten wir eine

KT auf Paaren / wohlpunkt. Räumen durch zelluläre Approximierung.

Warum erhalten wir in $\textcircled{A}$ tatsächlich reduzierte KT?

5. Lemma: Sei E^* KT auf Paaren.

$$(a) \quad E^*(X) \cong \tilde{E}^*(X) \oplus E^*(*) \quad \forall X \neq \emptyset$$

(b) Die natürlichen Abb.

$$\begin{aligned} \tilde{E}^*(X) &\longleftarrow \ker (E^*(\{x_0\}) \longleftarrow E^*(X)) \\ &\longleftarrow E^*(X, \{x_0\}) \end{aligned}$$

sind Isomorphismen, $\forall x_0 \in X$.

Paare vs Quotienten

6. Satz: Sei E^* KT auf Paaren.

Für jedes Paar (X, A) induzieren die Abb.

$$(X, A) \longrightarrow (X/A, CA) \longleftarrow (X/A, *)$$

Isomorphismen

$$E^*(X, A) \xleftarrow{\cong} E^*(X/A, *)$$

Inbesondere induziert für jedes
Kofaserpaar die Quotientenabb.

$$(X, A) \longrightarrow (X/A, *)$$

Isomorphismen

$$E^*(X, A) \xleftarrow{\cong} E^*(X/A, *)$$

Einhangung

7. Satz (Einhängungsiso):

Sei (E^*, ∂) KT auf Paaren. Für jeden nicht-leeren Raum X haben wir natürliche Isomorphismen

$$\tilde{F}^n(X) \cong \tilde{F}^{n+1}(\leq \vee)$$

$$\tilde{E}^n(x) \cong \tilde{E}^{n+1}(\Sigma x)$$

Ist (X, τ_0) wohlpunktiert so haben wir ebenso

natürliche Isos $\tilde{E}^n(x) \cong \tilde{E}^{n+1}(\Sigma_\bullet x)$

$$\hat{E}^u(x) \cong \hat{E}^{u+1}(\Sigma_{\bullet} x)$$

Weitere Konsequenzen der Axiome

8. Satz (LES eines Tripels)

Für jede KT auf P und jedes Tripel $X \supseteq A \supseteq B$ ist folgende Sequenz exakt:

$$E^n(A, B) \leftarrow E^n(X, B) \leftarrow E^n(X, A) \leftarrow E^{n-1}(A, B)$$

Hier sind die horizontalen Pfeile induziert durch die Inklusionen

$$(A, B) \longleftrightarrow (X, B) \longleftrightarrow (X, A)$$

und ∂' ist die Komposition

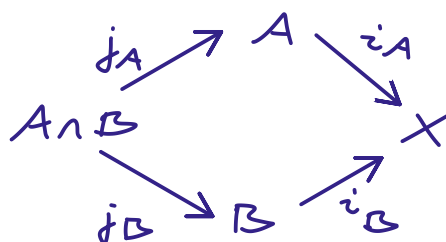
$$E^{\leftarrow}(x, A) \xleftarrow{\partial} E^{\leftarrow}(A) \xleftarrow{(incl.)^*} E^{\leftarrow}(A, B)$$

9. Satz (Mayer-Vietoris-Sequenz)

Sei E KT auf Paaren. Für jede Zelltriade und jede schnittige Triade $(X; A, B)$ ist folgende Sequenz exakt:

$$\begin{array}{c} \dots \\ \begin{array}{c} (j_A^*, j_B^*) \\ E^n(A \cap B) \leftarrow E^n(A) \oplus E^n(B) \leftarrow E^n(X) \end{array} \\ \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} i_A^* \\ -i_B^* \end{array} \right) \\ \Delta \\ E^{n-1}(A \cap B) \end{array} \end{array}$$

Hier betrachten wir folgende Inklusionen



und Δ ist die Komposition

$$E^n X \leftarrow E^n(X, B) \cong E^n(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial} E^{n-1}(A \cap B)$$

Ausschn.

Eindeutigkeit

10. Satz: Jede gewöhnliche Kohomologietheorie E^* ist isomorph zur zellulären Kohomologie mit Koeffizienten in $E^0(\text{Punkt})$. — siehe § 8

① Beweise aus §§ 1 & 2 übertragen