8. Zelluläre Kohomologie

Fixiere kommutativen Ring R & R-Modul M.

Wir schreiben $\vee$ für den Dualisierungsfunktor

eigentlich $\vee_M$

$$\vee: \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Mod}_R^{op}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & C^\vee := \mathrm{Hom}_R(C, M) \\ D \arrow[r, mapsto] & D^\vee := \mathrm{Hom}_R(D, M) \arrow[u, "f^\vee"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \circ f \\ g \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

1. Def.: Der **duale Komplex** eines Kettenkomplexes $(C_\bullet, d) \in \mathrm{Kom}_R$ ist der Komplex $(C_\bullet^\vee, d^\vee)$ mit

$$(C^\vee)_i := (C_{-i})^\vee$$

Korrektur & Ergänzung 13.07.25

$$(d^\vee)_i := (-1)^{-i} (d_{-i+1})^\vee$$

Konkret gilt also für $\left\{ \begin{matrix} \varphi \in C^\vee_{|\varphi|} \\ x \in C_{|x|} \end{matrix} \right\}$ mit $|x| = -|\varphi| + 1$:

$$(d^\vee \varphi)(x) = (-1)^{|\varphi|} \varphi(dx)$$

Der **duale Kettenmorphismus** $f^\vee$ eines Kettenmorphismus $f: (C_\bullet, d) \longrightarrow (D_\bullet, d)$ ist gegeben durch $(f^\vee)_i := (f_{-i})^\vee$.

Das definiert einen Funktor

$$\begin{aligned} \vee: \mathrm{Kom}_R &\longrightarrow \mathrm{Kom}_R^{op} \\ (C_\bullet, d) &\mapsto (C_\bullet^\vee, d^\vee) \end{aligned}$$

2. Def.: Die **Kohomologiegruppen** eines Kettenkomplexes $(C_\bullet, d)$ mit **Koeffizienten in M** sind gegeben durch

$$H^i((C_\bullet, d); M) := H_{-i}(C_\bullet^\vee, d^\vee)$$

(Geben wir M nicht an, meinen wir $M = R$.)

3. Def.: Die zelluläre Kohomologie eines Zell-Komplexes X bzw. eines Zellpaares (X, A) mit Koeffizienten in M ist gegeben durch

$$H^n(X; M) := H^n(C_\bullet(X; R); M)$$
$$H^n(X, A; M) := H^n(C_\bullet(X, A; R); M)$$

(Geben wir R & M nicht an, meinen wir i. d. R. $R = M = \mathbb{Z}$.)

Die zellulären Kohomologiegruppen von X sind also die Homologiegruppen eines Komplexes $C_\bullet(X)^\vee$ mit

$$[C_\bullet(X)^\vee]_{-i} = \mathrm{Hom}(C_i(X), \mathbb{Z})$$
$$= \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{\substack{i\text{-Zellen}\\ \text{von } X}} \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\Big)$$
$$= \prod_{\substack{i\text{-Zellen}\\ \text{von } X}} \mathbb{Z}$$

4. Lemma: Für jedes Zellpaar (X, A) ist die Sequenz

$$0 \leftarrow C_\bullet(A; R)^\vee \leftarrow C_\bullet(X; R)^\vee \leftarrow C_\bullet(X, A; R)^\vee \leftarrow 0$$

exakt.

Beweis:

Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A; R) \longrightarrow C_\bullet(X; R) \longrightarrow C_\bullet(X, A; R) \longrightarrow 0$$

spaltet in jedem Grad, da $C_i(X, A; R)$ freier R-Modul. Daher bleibt Exaktheit unter gradweiser Anwendung von $(\ )^\vee$ erhalten. $\square$

5. Satz: Die zellulären Kohomologiegruppen definieren zusammen mit den durch stetige Abb. $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ induzierten Abb.

$$H^n(X,A;M) \xleftarrow{f^*} H^n(Y,B;M)$$
$$\shortparallel$$
$$H^n(C_\bullet(f,R);M)$$

und den Randabb. der zu den Sequenzen aus Lemma 4 assoziierten langen exakten Homologiesequenz eine gewöhnliche Kohomologietheorie im Sinne von Def. 7.1 mit Koeffizienten M.

6. Bemerkung: Simpliziale Kohomologie lässt sich analog durch Dualisierung des simplizialen Kettenkomplexes definieren, und stimmt mit zellulärer Kohomologie überein.

Beweis des Satzes:

Homotopieinvarianz:

Sei $f \simeq g\colon X \rightrightarrows Y$. Wir hatten bereits gesehen:

$C_\bullet f \simeq C_\bullet g\colon C_\bullet X \rightrightarrows C_\bullet Y$.

Deshalb auch

$(C_\bullet f)^\vee \simeq (C_\bullet g)^\vee\colon (C_\bullet X)^\vee \leftleftarrows (C_\bullet Y)^\vee$

(Kettenmorph. $f,g\colon C_\bullet \rightrightarrows D_\bullet$ in Kom_R sind genau dann homotop, wenn R-lineare Abb. $\eta_i\colon C_i \longrightarrow D_{i+1}$ existieren mit $\eta d + d\eta = f - g$.

Daraus erhalten wir

$$(C^\vee)_{i+1} \xleftarrow{\eta^\vee} (D^\vee)_i \quad \text{mit} \quad \underset{\substack{\| \\ d^\vee\eta^\vee + \eta^\vee d^\vee}}{(\eta d + d\eta)^\vee} = \underset{\substack{\| \\ f^\vee - g^\vee}}{(f-g)^\vee}$$

Das zeigt: $f^\vee \simeq g^\vee$.

Die Homotopieinvarianz des algebraischen Homologiefunktors $H_n : \mathrm{Kom}_R \longrightarrow Ab$ impliziert also wieder

$$f^* = g^* : H^n(X;M) \Longleftarrow H^n(Y;M)$$

(LES) folgt aus Lemma 4

(AUSSCHNEIDUNG) Ü

(ADDITIVITÄT) Ü

Beispiele

Ü Was ergibt sich für $H^*(X;M)$ für

$$X = \begin{cases} \text{Punkt} \\ S^1 \\ S^1 \times S^1 \\ S^n \\ D^n \\ \mathbb{C}P^n \\ \mathbb{R}P^n \end{cases} \quad \text{und} \quad R = M = \begin{cases} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2 \\ \mathbb{Q} \end{cases}$$

?