§9: Das $\smile$ – Produkt

Hier: H^* zelluläre Kohomologie mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring R, $M := R$

$C_\cdot X := C_\cdot(X; R)$

$(C_\cdot X)^\vee := C_\cdot(X; R)^\vee$ bzgl. $M = R$ (§8)

$- \otimes - := - \otimes_R -$

$H^* X := H^*(X; R)$

usw.

Bereits gesehen: Für Räume X, Y haben wir Isomorphismus

(*) $$C_\cdot X \otimes C_\cdot Y \cong C_\cdot(X \times Y)$$

[§2, Lemma 7], und daraus erhalten wir

$$H_* X \times H_* Y \xrightarrow{\times} H_*(X \times Y)$$

(§6). Analog definieren wir hier:

$$H^* X \times H^* Y \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y)$$

Dazu brauchen wir:

1. Lemma: Für Kettenkomplexe $C_\cdot$, $D_\cdot$ (über R) haben wir einen kanonischen natürlichen Homomorphismus

$$C_\cdot^\vee \otimes D_\cdot^\vee \xrightarrow{\mu} (C_\cdot \otimes D_\cdot)^\vee.$$

Er ist ein Iso, falls $C_\cdot$ in allen Graden frei von endlichem Rang.

$^\vee(-) = \mathrm{Hom}_R(-, R)$

Beweis: Definiere zunächst

$$\mu_{p,q}: (C_{-p})^\vee \otimes (D_{-q})^\vee \longrightarrow (C_{-p} \otimes D_{-q})^\vee$$

$$f \otimes g \longmapsto (a \otimes b \longmapsto (-1)^{p \cdot q} f(a) \cdot g(b))$$

$p = |a|$
$-q = |g|$

Setze $\mu_{p,q}$ auf den übrigen Summanden von $(C_\bullet^\vee \otimes D_\bullet^\vee)_{p+q}$ durch Null fort.

$$\mu_{p,q}: (C_\bullet^\vee \otimes D_\bullet^\vee)_{p+q} \longrightarrow (C_{-p} \otimes D_{-q})^\vee$$

Definiere schließlich

$$\mu_n: \sum_{\substack{p,q:\\ p+q=n}} (C_\bullet^\vee \otimes D_\bullet^\vee)_n \longrightarrow [(C_\bullet \otimes D_\bullet)^\vee]_n$$

Ü μ definiert einen Kettenmorphismus.

Seien dazu $f \in (C^\vee)_{|f|} = \mathrm{Hom}(C_{-|f|}, R)$, $a \in C_{|a|}$
$g \in (C^\vee)_{|g|} = \mathrm{Hom}(C_{-|g|}, R)$, $b \in C_{|b|}$

$$d^\vee \mu(f \otimes g)(a \otimes b) = (-1)^{|f \otimes g|} \mu(f \otimes g)(d(a \otimes b))$$

$$= (-1)^{|f \otimes g|} \mu(f \otimes g)(da \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes db)$$

$$= (-1)^{|f|+|g|} \cdot \begin{cases} (-1)^{|da| \cdot |g|} f(da) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a|+1 \wedge |g| = -|b| \\ (-1)^{|a|} \cdot (-1)^{|a||g|} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a| \wedge |g| = -|b|+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{|f|+|g| + |f||g|} f(da) \cdot g(b) & \text{falls } \ldots\ldots \\ (-1)^{|f|+|g| + |f| + |f||g|} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } \ldots\ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{|f||g| + |f|+|g|} f(da) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a|+1 \wedge |g| = -|b| \\ (-1)^{|f||g| + |g|} f(a) \cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a| \wedge |g| = -|b|+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mu(d(f\otimes g))(a\otimes b) = \mu(d^\vee f\otimes g + (-1)^{|f|} f\otimes d^\vee g)(a\otimes b)$$

$$= \begin{cases} (-1)^{|a||g|}(d^\vee f)(a)\cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a|+1 \wedge |g| = -|b| \\ (-1)^{|f|}(-1)^{|a|\cdot|d^\vee g|} f(a)\cdot (d^\vee g)(b) & \text{falls } |f| = -|a| \wedge |g| = -|b|+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{|a||g|}\cdot(-1)^{|f|} f(a)\cdot g(b) & \text{falls } \dots\dots \\ (-1)^{|f|}\cdot(-1)^{|a|\cdot|d^\vee g|}\cdot(-1)^{|g|} f(a)\cdot g(b) & \text{falls } \dots\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{(|f|+1)|g|+|f|} f(a)\cdot g(b) & \text{falls } \dots\dots \\ (-1)^{|f|+|f|(|g|+1)+|g|} f(a)\cdot g(b) & \text{falls } \dots\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{|f|\cdot|g|+|g|+|f|} f(a)\cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a|+1 \wedge |g| = -|b| \\ (-1)^{|f|\cdot|g|+|g|} f(a)\cdot g(b) & \text{falls } |f| = -|a| \wedge |g| = -|b|+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Letzte Aussage des Lemmas lässt sich gradweise beweisen. Sie ist für

$$C_\bullet = (R \text{ konzentriert in einem Grad})$$

klar und folgt daraus und aus Verträglichkeit von μ mit direkten Summen. $\square$

2. Def.: X, Y Räume. Das **Kreuzprodukt auf Homologie** ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
H_*X \otimes H_*Y \arrow[rr, "\times"] \arrow[d, equal] & & H_*(X \times Y) \arrow[d, equal] \\
H_*(C_\cdot X) \otimes H_*(C_\cdot Y) \arrow[r, "\times"', "(\S 6)"] & H_*(C_\cdot(X) \otimes C_\cdot(Y)) \arrow[r, "\cong", "(*)_*"'] & H_*(C_\cdot(X \times Y))
\end{tikzcd}$$

Das **Kreuzprodukt auf Kohomologie** ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
H^*X \otimes H^*Y \arrow[rrr, "\times"] \arrow[d, equal] & & & H^*(X \times Y) \arrow[d, equal] \\
H_*(C_\cdot X^\vee) \otimes H_*(C_\cdot Y^\vee) \arrow[d, "\times"', "(\S 6)"] & & & H_*(C_\cdot(X \times Y)^\vee) \\
H_*(C_\cdot X^\vee \otimes C_\cdot Y^\vee) \arrow[rr, "\mu"'] & & H_*((C_\cdot(X) \otimes C_\cdot(Y))^\vee) \arrow[ur, "\cong", "(*^\vee)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

3. Satz: R kommutativer Ring, (X, A), (Y, B) Raumpaare

(a) Obige Konstruktion liefert R-bilineare Abb.

$$\times : H_pX \times H_qY \longrightarrow H_{p+q}(X \times Y)$$
$$\times : H_p(X, A) \times H_q(Y, B) \longrightarrow H_{p+q}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

bzw.

$$\times : H^pX \times H^qY \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y)$$
$$\times : H^p(X, A) \times H^q(Y, B) \longrightarrow H^{p+q}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

für (Ko)Homologie mit Koeff. in R.

(b) Diese Abb. sind natürlich in beiden Komponenten.

(c) Für die Vertauschungsabb.

$$\tau : X \times Y \longrightarrow Y \times X$$
$$(x, y) \longmapsto (y, x)$$

Kommutieren die folgenden beiden Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[d, mapsto] & H_p X \times H_q Y \arrow[r, "\times"] \arrow[d] & H_{p+q}(X+Y) \arrow[d, "\tau_*", "\cong"'] \\
(-1)^{p\cdot q}(b,a) & H_p Y \times H_q X \arrow[r, "\times"] & H_{p+q}(Y+X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(-1)^{p\cdot q}(b,a) & H^p X \times H^q Y \arrow[r, "\times"] & H^{p+q}(X+Y) \\
(a,b) \arrow[u, mapsto] & H^p Y \times H^q X \arrow[r, "\times"] \arrow[u] & H^{p+q}(Y+X) \arrow[u, "\tau^*", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Beweis:

(a) klar für X & Y — ein Homomorphismus

$$H^p X \otimes H^q Y \longrightarrow H^{p+q}(X+Y)$$

ist das Gleiche wie eine bilineare Abb.

$$H^p X \times H^q Y \longrightarrow H^{p+q}(X+Y).$$

Für (X,A) und (Y,B) müssen wir in Konstruktion den Iso $(*)$ durch den Iso

$$C_\bullet(X,A) \otimes C_\bullet(Y,B) \cong C_\bullet(X+Y,\ X+B \cup A+Y)$$

optionale Ü: diesen allgemeineren Iso aus $(*)$ herleiten

(b) klar aus Konstruktion

(c) Die Zellen von $X+Y$ haben die Form

$$D^{p+q} \cong D^p \times D^q \xrightarrow{j \times k} X+Y$$

Auf den Summanden von $C_\bullet(X+Y)$ der zu einer solchen Zelle gehört ist $C_\bullet(\tau)$ gegeben durch Multiplikation mit

$$\deg\left(S^{p+q} \xrightarrow{\tau_{p,q}} S^{p+q}\right)$$
$$(s_1,\dots,s_p,t_1,\dots,t_q) \longmapsto (t_1,\dots,t_q,s_1,\dots,s_p),$$

wobei wir hier Homöomorphismen

$$S^{p+q} \cong S^1 \wedge \dots \wedge S^1, \quad S^1 \cong I/\partial I$$

für die Schreibweise in Koordinaten wählen.

Beh: $\deg(\tau_{p,q}) = (-1)^{p\cdot q}$

Bew.:

- $\deg\left(\underset{(s,\ t)}{S^1 \wedge S^1} \xrightarrow{\tau_{1,1}} \underset{(t,s)}{S^1 \wedge S^1}\right) = -1$

  z.B. durch explizite Homotopie zu

  $$S^2 \longrightarrow S^2$$
  $$(x,y,z) \longmapsto (x,y,-z)$$

  – optionale Ü

- $\deg(\mathrm{id} \wedge f : S^1 \wedge S^n \longrightarrow S^1 \wedge S^n)$

  $= \deg(f : S^n \longrightarrow S^n)$, für beliebiges f

  – $(S^1 \wedge -)$ ist Einhängung, und deg per Konstruktion mit Einhängung verträglich.

- $\deg(f \wedge \mathrm{id} : S^n \wedge S^1 \longrightarrow S^n \wedge S^1)$

  $= \deg(f : S^n \longrightarrow S^n)$, für beliebiges f

  – lässt sich auf vorherige Aussage zurückführen; betrachte dazu

$$\begin{tikzcd}
S^{n+1} \arrow[r, "\tau_{n,1}"] \arrow[d, "f \wedge \mathrm{id}"'] & S^{n+1} \arrow[d, "\mathrm{id} \wedge f"] \\
S^{n+1} \arrow[r, "\tau_{n,1}"] & S^{n+1}
\end{tikzcd}$$

- $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$ (Top I)

Ü Schreibe nun $\tau_{p,q}$ als Komposition von beidseitigen Einhängungen von $\tau_{1,1}$, um Beh. zu erhalten. $\triangle$

Also kommutiert generell

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[d, mapsto] & C_p X \times C_q Y \arrow[r, "(*)"] \arrow[d] & C_{p+q}(X \times Y) \arrow[d, "C_\bullet(\tau)"] \\
(-1)^{p \cdot q}(y,x) & C_q Y \times C_p X \arrow[r, "(*)"] & C_{p+q}(Y \times X)
\end{tikzcd}$$

und hieraus folgt (c). $\square$

4. Def.: Das cup-Produkt auf Kohomologie mit Koeff. in R

$$\cup : H^pX \times H^qX \xrightarrow{\cup} H^{p+q}X$$

bzw.

$$\cup : H^p(X,A) \times H^q(X,B) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X, A\cup B)$$

ist gegeben durch Komposition des Kreuzprodukts mit Δ^*, für

$$\Delta : X \longrightarrow X \times X$$
$$x \longmapsto (x, x)$$

$$\begin{tikzcd} H^pX \times H^qX \arrow[rr, "\cup"] \arrow[dr, "\times"'] & & H^{p+q}X \\ & H^{p+q}(X\times X) \arrow[ur, "\Delta^*"'] & \end{tikzcd}$$

5. Satz X Raum, $H^*X := \bigoplus_p H^pX$ (Koeff. in R).
Das $\cup$-Produkt macht H^*X zu einem graduiert-kommutativen graduierten Ring. Das heißt insbesondere:

- Für $a \in H^pX$, $b \in H^qX$ ist $a\cup b \in H^{p+q}X$
- $a \cup b = (-1)^{p\cdot q}\, b \cup a$ für $a \in H^pX$, $b \in H^qX$

Das 1-Element in H^0X ist gegeben durch das Bild von $1 \in R$ unter

$$R \cong H^0(pt) \xrightarrow{\pi^*} H^0(X) \qquad (X \xrightarrow{\pi} *)$$
$$1 \;\hat{=}\; [pt]$$

Ferner ist für $f : X \longrightarrow Y$ die induzierte Abb.

$$H^*X \xleftarrow{f^*} H^*Y$$

ein Ringhomomorphismus.

Beweis:

Ü Führe alle Aussagen auf Satz 3 zurück. $\square$