Künneth & Koeffizienten für Kohomologie

1. **Satz** (Künneth): X, Y topologische Räume

Mit Koeffizienten in einem Körper gilt:

Falls $H_i(X)$ für alle i endlich-dimensional ist, so ist das Kreuzprodukt

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y)$$

ein Isomorphismus graduierter Ringe.

Allgemeiner gilt mit Koeffizienten in einem HIR R:

Falls $H_i(X)$ für alle i endlich erzeugt ist, haben wir für jeden Grad n eine natürliche k.e.S.

$$0 \to \left[H^*(X) \otimes H^*(Y)\right]^n \xrightarrow{\times} H^n(X \times Y) \to \bigoplus_{\substack{p,q:\\ p+q=\underline{\underline{n+1}}}} \mathrm{Tor}(H^p X, H^q Y) \to 0$$

Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

2. **Bemerkung**: Das Kreuzprodukt können wir nach §5 auch beschreiben als

$$\begin{aligned} H^*(X) \otimes H^*(Y) &\xrightarrow{\times} H^*(X \times Y) \\ a \otimes b &\longmapsto \pi_X^* a \cup \pi_Y^* b \end{aligned}$$

(Beweis: Ü)

3. Erinnerung: $\mathrm{Ext}_R := \mathrm{Ext}^1_R$

Für Moduln M, M_i, N, N_j über einem HIR R gilt:

(a) $\mathrm{Ext}_R(M, N) = 0$ falls M frei oder N divisibel.

(b) $\mathrm{Ext}_R(\oplus_i M_i, N) = \prod_i \mathrm{Ext}(M_i, N)$

$\mathrm{Ext}_R(M, \prod_j N_j) = \prod_j \mathrm{Ext}(M, N_j)$

(c) $\mathrm{Ext}_R(R/d, N) = N/dN$ für $d \in R \setminus 0$.

[siehe HA D4 Satz 3, 4 & M5, Korollar 5, 7]

4. Satz (Universelles Koeffiziententheorem)

X topologischer Raum

Für (Ko)Homologie mit Koeffizienten in einem Körper k haben wir Isomorphismen

$$H^n(X) \cong H_n(X)^\vee$$

(also $\quad H^n(X;k) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X;k), k)$)

Ist allgemeiner R ein HIR, M ein R-Modul, so haben wir für jedes n eine natürliche k.e.S.

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), M) \longrightarrow H^n(X; M) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Hom}(H_n(X), M) \to 0$$

Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

5. Beispiel / ü

Sei $R = \mathbb{Z}$, und seien alle $H_i(X)$ endlich erzeugt.

Schreibe $\quad H_i(X) = \mathbb{Z}^{\oplus n_i} \oplus T_i$

Torsion

Dann folgt aus dem Theorem:

$$H^i(X) \cong \mathbb{Z}^{\oplus n_i} \oplus T_{i-1}$$

6. Beispiel / ü $\quad H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$

Beweisstruktur:

$$\text{alg. Künneth-Theorem (Satz 6.7)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Künneth für } H_* & (\S 6) \\ \text{Koeffiz. für } H_* & (\S 6) \\ \text{Künneth für } H^* & \underline{\text{hier}} \end{cases}$$

$$\text{alg. Koeffizienten-Theorem} \Rightarrow \text{Koeffiz. für } H^* \quad \underline{\text{unten}}$$

7. Beweis alg. Künneth $\Rightarrow$ Künneth für H^*

Spezialfall: X hat (zelluläre Approximierung mit) endlich viele Zellen in jeder Dimension

Aus dem alg. Künneth-Theorem erhalten wir k.e.S.

$$0 \to \left[H_*((C_\bullet X)^\vee) \otimes H_*((C_\bullet Y)^\vee)\right]_{-n} \xrightarrow{\times} H_{-n}((C_\bullet X)^\vee \otimes (C_\bullet Y)^\vee) \to \mathrm{Tor}(\ldots)$$

Unter unser Voraussetzung ist $C_\bullet X$ in jeden Grad frei von endlichem Rang. Also ist nach Lemm 9.1 die Abb.

$$\mu: \ (C_\bullet X)^\vee \otimes (C_\bullet Y)^\vee \longrightarrow (C_\bullet X \otimes C_\bullet Y)^\vee$$

ein Isomorphismus, und somit

$$H_{-n}((C_\bullet X)^\vee \otimes (C_\bullet Y)^\vee) \cong H_{-n}\Big((\underbrace{C_\bullet X \otimes C_\bullet Y}_{C_\bullet(X\times Y)})^\vee\Big) = H^n(X \times Y).$$

(i) Identifiziere andere Terme der k.e.S.

Idee für allgemeinen Fall:

Ist $C_\bullet$ Komplex mit $C_j = 0$ $\forall j < 0$ und $H_i(C_\bullet)$ endlich erzeugt $\forall i$,

so existiert eine freie Auflösung

$$\tilde{C}_\bullet \xrightarrow{\simeq} C_\bullet \qquad \text{(Quasi-Isomorphismus)}$$

mit $\tilde{C}_i$ frei und endlich erzeugt $\forall i$

(induktive Verallgemeinerung der freien Auflösung eines Moduls).
Wende dies an auf $C_\bullet := C_\bullet X$. Dann ist

$$H_i(\tilde{C}) = H_i(X)$$
$$H^i(\tilde{C}) = H^i(X)$$

und $\tilde{C}_i$ für alle i frei und endlich erzeugt.
Verfahre nun wie im Spezialfall. $\square$

8. Lemma: R kommutativer Ring.
Für jeden R-Modul M und Kettenkomplex $C_\bullet$ über R haben wir einen wohldef. Homomorphismus

$$H^n(C_\bullet, M) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Hom}_R(H_n(C_\bullet), M)$$

mit
$$[f] \longmapsto ([x] \mapsto f(x))$$
$$f: C_n \to M$$

Beweis: Ü $\square$

9. Satz: Koeffiziententheorem der homologischen Alg.
Sei R ein HIR, M ein R-Modul,
$C_\bullet$ ein Kettenkomplex über R mit C_i frei $\forall i$.
Dann haben wir für jedes n eine natürliche k.e.S.

$$0 \to \mathrm{Ext}_R(H_{n-1}(C_\bullet), M) \to H^n(C_\bullet, M) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Hom}_R(H_n(C_\bullet), M) \to 0$$

Diese Sequenz spaltet, aber nicht auf natürliche Weise.

Beweis: ganz analog zu Satz 6.7. $\square$