11. Beispiele / Anwendungen

Anwendung A: Gewisse Räume sind nicht homotopie-äquivalent.

Vgl. Blatt 9. Hilfreiche Resultate zu dieser Klasse von Anwendungen sind u.A.:

1. Satz: $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/x^{n+1}$ $\quad |x| = 2$

2. Satz: $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x]/x^{n+1}$ $\quad |x| = 1$

(Beweise hierzu: Blatt 9, Aufgabe 1 oder später via Poincaré-Dualität)

3. Lemma: Seien X, Y wohlpunktiert, sodass
$$H^*(X \vee Y) \cong H^*(pt) \oplus \tilde{H}^*(X) \oplus \tilde{H}^*(Y)$$
auf kanonische Weise. Dann ist
$$a \cup b = 0$$
für jedes $a \in \tilde{H}^*(X)$ und $b \in \tilde{H}^*(Y)$.

Beweis: Ü

Beispiele/Übung: $\mathbb{C}P^2 \not\simeq S^2 \vee S^4$ — Blatt 9, Aufg. 2
$$S^1 \times S^2 \not\simeq S^1 \vee S^2 \vee S^3$$

Anwendung B: Borsuk-Ulam

4. Satz: Für jede (stetige) Abbildung
$$g: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
existiert ein $\underline{x} \in S^n$ mit $g(\underline{x}) = g(-\underline{x})$.

Dazu brauchen wir:

5. Lemma: Sei $n \geq 2$. Die Inklusion
$$\mathbb{R}P^{n-1} \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}P^n$$
induziert

(a) auf $H^*(-;\mathbb{Z}/_2)$ den Ringepimorphismus
$$\mathbb{Z}/_2[x]/x^n \overset{i^*}{\twoheadleftarrow} \mathbb{Z}/_2[x]/x^{n+1}$$
$$x \longleftarrow x$$

(b) auf π_1 den Epimorphismus
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}/_2 \qquad \text{falls } n-1=1$$
bzw. Isomorphismen
$$\mathbb{Z}/_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/_2 .$$

Beweis:

a: Ü Reicht zu zeigen, $i^* \neq 0$ in Grad 1.
Ü Zeige $i^* \neq 0$ in Grad 1, z.B. explizit mit zellulärer Konstruktion.

b: Ü $\square$

6. Lemma: Für $m > n$ (≥ 1) induziert jede Abb.
$$f: \mathbb{R}P^m \longrightarrow \mathbb{R}P^n$$
(a) die Nullabb. auf $\tilde{H}^*(-;\mathbb{Z}/_2)$.
(b) die Nullabb. auf $\pi_1(-)$.

Beweis:

a: Ü folgt rein algebraisch aus Ringstruktur.
b: Ü Folgt aus (a), Koeffiziententheorem & Hurewicz.

$\square$

Beweis zu Borsuk-Ulam (durch Widerspruch)

Sei $g: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben mit $g(\underline{x}) \neq g(-\underline{x})$ für alle $\underline{x} \in S^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} f: \quad S^n &\longrightarrow S^{n-1} \\ \underline{x} &\longmapsto \frac{g(\underline{x}) - g(-\underline{x})}{\| g(\underline{x}) - g(-\underline{x}) \|} \end{aligned}$$

wohldef. und erfüllt $f(-\underline{x}) = -f(\underline{x})$. (*)

Wir erhalten daher induzierte Abb. $\bar{f}$

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_n"] & S^{n-1} \arrow[d, "\pi_{n-1}"] \\ \mathbb{R}P^n \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathbb{R}P^{n-1} \end{tikzcd}$$

Laut Lemma 6 ist $\bar{f}_* = 0$ auf π_1.

Insbesondere existiert nach Überlagerungstheorie eine Hochhebung $\tilde{f}$ von $\bar{f}$.

$$\begin{tikzcd} & & S^n \arrow[d, "\pi_{n-1}"] \\ S^n \arrow[r, "\pi_n"'] \arrow[urr, bend left, "f"] & \mathbb{R}P^n \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & \mathbb{R}P^{n-1} \end{tikzcd}$$

Nun sind $\tilde{f} \circ \pi_n$ und f zwei Hochhebungen von $\bar{f} \circ \pi_n$.

(i) Zeige, dass $\tilde{f} \circ \pi_n$ und f in einem Punkt übereinstimmen und somit gilt

$$\tilde{f} \circ \pi_n = f.$$

Das ist ein Widerspruch zu (*).

$\square$