12: Poincaré-Dualität

1. Def.: Eine topologische Mannigfaltigkeit ist ein zweitabzählbarer Hausdorff-Raum M, in dem jeder Punkt eine Umgebung homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ besitzt (für variables n).

2. Bem.:

(a) „zweitabzählbar" heißt, die Topologie besitzt abzählbare Basis.

z. B.: $\mathbb{R}^n$ ist zweitabzählbar, Basis z. B.

$$\{ \mathring{D}_\varepsilon(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathbb{Q}^n,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \}$$

z. B.: Raum M, der sich durch abzählbar viele Umgebungen $\cong \mathbb{R}^n$ überdecken lässt

(b) n ist notwendig auf Zusammenhangskomp. von M konstant

3. Def.: Eine n-dimensionale Mft./n-Mannigfaltigkeit ist eine Mft. M, deren jede Komponente dieselbe Dimension n hat.

Notation: „$\dim M = n$"

4. Beispielen

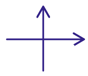
$\emptyset$ („$\dim \emptyset = n$" für jedes n)

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \\ S^n \\ \mathbb{R}P^n \end{array}\right\}$ dim n

$\mathbb{C}P^n$ (dim $2n$)

$\left.\begin{array}{l} \text{Kleinsche Flasche} \\ \text{Torus } S^1 \times S^1 \end{array}\right\}$ dim 2

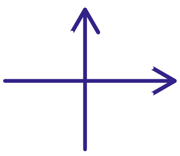
Ü Entscheide:

- $\left.\begin{array}{ll} M & m\text{-Mft.} \\ N & n\text{-Mft.} \end{array}\right\} \Rightarrow M \times N$ $(m+n)$-Mft ✓
- M m-Mft., $U \subseteq M$ offen
  $\Rightarrow U$ m-Mft. ✓
- M m-Mft., $A \subseteq M$ abg.
  $\Rightarrow A$ Mft. ✗
  (siehe z.B.  $\subseteq \mathbb{R}^2$ unten)
- $\begin{array}{c} \tilde{M} \\ \downarrow \\ M \end{array}$ Überlagerung

  M m-Mft $\Rightarrow \tilde{M}$ m-Mft. falls Fasern abzählbar ✓

  M m-Mft $\Leftarrow \tilde{M}$ m-Mft. falls Fasern endlich ✓

  Für abzählbare Fasern kann es passieren, dass M nicht Hausdorffsch ist.

-  $\subseteq \mathbb{R}^2$ 1-Mft? ✗

  (Keine Umgebung des Ursprungs homöomorph zu $\mathbb{R}$.)

• $$\frac{\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}}{(x,1)\sim(x,2) \quad \forall x\neq 0}$$

1-Mft ? ✗

(nicht Hausdorffsch)

• $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0\}$ 2-Mft ? ✗

(Umgebungen von Randpunkten p <u>nicht</u> homöomorph zu $\mathbb{R}^2$:

- Jede Umgebung von p enthält Umgebung V, sodass $V\setminus p$ zusammenziehbar ist. ($V\setminus p =$ ).
- Hätte p Umgebung homöomorph zu $\mathbb{R}^2$, so würde jede Umgebung von p eine Umgebung U enthalten, sodass $U\setminus p \simeq S^1$. ($U\setminus p =$ )

Könnten so Inklusionen finden

$$U'\setminus p \subseteq V\setminus p \subseteq U\setminus p$$

mit $$U'\setminus p \hookrightarrow U\setminus p \simeq S^1$$

Homotopieäquivalenz aber $V\setminus p \simeq *$. ↯.)

5. Satz – Eigenschaften von Mft

(a) Mannigfaltigkeiten sind lokal wegzusammenhgd. Insbesondere stimmen Zusammenhangs- und Wegekomponenten überein.

$$M = \coprod_{[x] \in \pi_0(X)} M_{[x]}$$

(b) Jede Mft. ist homotopieäquivalent zu einem Zellkomplex.
Jede kompakte Mft. ist homotopieäquivalent zu einem endlichen Zellkomplex; insbesondere sind $H_*(M;R)$ und $H^*(M;R)$ für jede kompakte Mft. endlich erzeugt.

Beweis:

(a) klar

(b) tief. $\square$

Vorschau §14: (R-Orientierbarkeit)

- Jede Mft. ist $\mathbb{Z}/2$-orientierbar.
- Jede einfach-zusammenhgd. Mft. ist [$\mathbb{Z}$-]orientierbar.
- Eine kompakte zusammenhgd. n-Mft. ist [$\mathbb{Z}$-]orientierbar. $\Leftrightarrow$ $H_n(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

Ü Welche der folgenden Mft. sind [$\mathbb{Z}$-] orientierbar?

$$\left.\begin{matrix} S^n \\ S^n \times S^m \\ \mathbb{C}P^n \end{matrix}\right\} \checkmark$$

jeweils $H_{\dim M}(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$;
(für S^n mit $n \geq 2$,
$S^n \times S^m$ mit $n \geq 2$ und $m \geq 2$
$\mathbb{C}P^n$
außerdem einfach-zshgd.)

$\mathbb{R}P^n$ orientierbar $\Leftrightarrow$ n ungerade

Kleinsche Flasche nicht orientierbar

betrachte auch hier jeweils $H_{\dim M}(M;\mathbb{Z})$

- $H_i(M;R) = 0$ $i > \dim n$, für jede n-Mft M.
- $H_n(M;R) \cong R$ für jede kompakte zusammenhängende und R-orientierbare n-Mft M.

Ein Erzeuger von $H_n(M;R)$ als R-Modul heißt Fundamentalklasse $[M]$ von M.
Ist allgemeiner $M = M_0 \amalg \dots \amalg M_k$ mit M_i zshgd., kompakt, R-orientierbare n-Mft., so ist eine Fundamentalklasse von M eine Homologieklasse der Form

$$[M] = \sum_{i=0}^{k} [M_i]$$

mit $[M_i]$ FK von M_i.

Vorschau (§13):

- Haubenprodukt:
  Für beliebige Räume X und Koeffizientenringe R existiert ein R-bilineares Produkt

$$\begin{array}{rccccc} \cap: & H^p(X;R) & \times & H_k(X;R) & \longrightarrow & H_{k-p}(X;R) \\ & (\alpha & , & x) & \longmapsto & \alpha \cap x \end{array}$$

- Auswertungspaarung:

$$\begin{array}{rccccc} \langle -,-\rangle: & H^p(X;R) & \times & H_p(X;R) & \longrightarrow & R \\ & [f] & , & [a] & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

  (In Notation aus Lemma 10.8 ist
  $\langle [f],[a]\rangle = \omega([f])([a])$.)

- Beziehung zwischen Kelch- & Haubenprodukt:
  Für X, R beliebig gilt:

$$(*) \qquad \langle \alpha \cup \beta, x\rangle = \langle \alpha, \beta \cap x\rangle \quad \in R$$

$$\forall \alpha \in H^p(X;R),\ \beta \in H^q(X;R),\ x \in H_{p+q}(X;R)$$

6. Theorem ($\cap$-PD):
Sei M eine kompakte R-orientierbare n-Mft. Das $\cap$-Produkt mit einer FK $[M] \in H_n(M;R)$ definiert Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} H^p(M;R) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-p}(M;R) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \cap [M] \end{array}$$

7. Def.: Eine R-Bilinearform $M \times N \longrightarrow R$ ist **perfekt** falls die induzierten Abb.

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,R), \quad m \mapsto \beta(m,-)$$

und

$$N \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,R), \quad n \mapsto \beta(-,n)$$

Isomorphismen sind.

8. Theorem (∪-PD):

Sei R ein HIR, M eine kompakte R-orientierb. n-Mft mit FK $[M]$.

Ist $R = k$ ein Körper, so ist

$$H^p(M;k) \times H^{n-p}(M;k) \longrightarrow k$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle$$

eine perfekte Bilinearform. Insbesondere also

$$H^p(M;k) \cong H^{n-p}(M;k)^\vee \quad \text{(kanonisch)}$$
$$\cong H^{n-p}(M;k) \quad \text{(nicht-kanonisch; } H^{n-p}(M;k) \text{ endlich-dim. nach Satz 5 (b))}$$

Für beliebigen HIR R ist

$$H^p(M;R)/T^p \times H^{n-p}(M;R)/T^{n-p} \longrightarrow k$$
$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \mapsto \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle$$

eine perfekte Bilinearform, wobei $T^i \subseteq H^i(M;R)$ die Torsionsuntergruppe ist.

Insbesondere folgt wieder:

$$H^p(M;R)/T^p \cong H^{n-p}(M)/T^{n-p}$$

9. Korollar (aus $\frown$-P.D)

M zshgd., kompakte, R-orientierbare n-Mft.
Dann definiert Auswertung auf einer FK $[M]$
einen Iso

$$H^n(M;R) \xrightarrow{\cong} R$$
$$\alpha \longmapsto \langle \alpha, [M] \rangle$$

Beweis:

1. Schreibe Abb. als Komposition

$$H^n(M;R) \xrightarrow{\frown [M]} H_0(M;R) \xrightarrow{\langle 1, - \rangle} R$$

2. Zeige, dass beide Faktoren Isos sind, mittels $\frown$-P.D. bzw. kleiner Rechnung. $\square$

10. Korollar (aus ∪-PD)

M zshgd., kompakte, R-orientierbare n-Mft.

R HIR

Zu jedem $\alpha \in H^p(M;R)$, das einen freien Summanden von $H^p(M;R)$ erzeugt, existiert ein $\beta \in H^{n-p}(M;R)$ derart, dass

$$\alpha \cup \beta \in H^n(M;R) \underset{\text{Kor. 9}}{\cong} R$$

wieder ein Erzeuger ist.

(Ist R ein Körper, bedeutet Voraussetzung an α schlicht $\alpha \neq 0$.)

Beweis:

Da α einen freien Summanden erzeugt, können wir einen Homomorphismus

$$f_\alpha : H^p(M;R)/T^p \longrightarrow R$$

mit

$$\alpha \longmapsto 1$$

Nach ∪-PD ist

$$H^{n-p}(M;R)/T^{n-p} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(H^p(M;R)/T^p, R\right)$$

$$\beta \longmapsto \langle - \cup \beta, [M] \rangle$$

ein Isomorphismus. Also existiert ein β mit

$$\langle - \cup \beta, [M] \rangle = f_\alpha.$$

Auswertung an α ergibt:

$$\langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle = 1$$

Da $\langle -, [M] \rangle$ laut Korollar 9 Iso ist, folgt:

$\alpha \cup \beta$ ist Erzeuger von $H^n(M;R)$. $\square$

11. Korollar (aus $\cap$-PD und $\cup$-PD):

Die Bettizahlen

$$b_i(X;k) := \dim_k H_i(X;k) \qquad (k \text{ Körper})$$

einer zshgd., kompakten, k-orientierbaren n-Mft. erfüllen:

$$b_i(X;k) = b_{n-i}(X;k)$$
$$b_0(X;k) = b_n(X;k) = 1.$$

$$1 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-1} \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0$$

Beweis: Einfache Ü $\square$

Anwendung A:

Die einzige kompakte zusammenziehbare Mft ist der Punkt.

⊙

Sei M kompakt und zusammenziehbar.

Dann ist M insbesondere zusammenhängend.

Jede Mft. ist $\mathbb{Z}/_2$-orientierbar, also auch M.

Also können wir Korollar 11 mit $k = \mathbb{Z}/_2$ anwenden.

Da M zusammenziehbar, ist allerdings

$$b_i(M; \mathbb{Z}/_2) = 0 \quad \forall i > 0.$$

Also $\dim M = 0$.

Die einzige nulldimensionale zusammenhängende Mft. ist der Punkt.

Anwendung B:

$S^1 \vee S^1$ ist nicht homotopieäquivalent zu einer kompakten Mft.

⊙ Angenommen, $S^1 \vee S^1 \simeq M$ für eine kompakte Mft. M. Dann ist M auch zusammenhängend (da $S^1 \vee S^1$ zusammenhängend), und ohnehin $\mathbb{Z}/_2$-orientierbar. Ferner

$$b_i(M; k) = b_i(S^1 \vee S^1; k),$$

also insbesondere:

$$\underset{1}{\underset{\parallel}{b_0(M; \mathbb{Z}/_2)}} \quad \underset{2}{\underset{\parallel}{b_1(M; \mathbb{Z}/_2)}} \quad \underset{0}{\underset{\parallel}{b_2(M; \mathbb{Z}/_2)}} \quad \underset{0}{\underset{\parallel}{b_3(M; \mathbb{Z}/_2)}} \quad \ldots$$

Das passt nicht zu Korollar 11. ↯

Anwendung C: $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/\alpha^{n+1}$ mit $|\alpha| = 2$

$H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2[\alpha]/\alpha^{n+1}$ mit $|\alpha| = 1$

ü benutze additive Struktur von H^*, Korollar 10 & Induktion über n.