Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Peter Arndt

Wintersemester 2018/19
06.11.2018

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie
Blatt 5

---

9 | Stiefelbahnen

Die sogenannten Stiefel-Mannigfaltigkeiten $V_n(\mathbb{R}^k)$ sind tatsächlich Mannigfaltigkeiten. Sie sind kompakt und lassen sich mit Bahnenräumen $\mathrm{O}(k)/\mathrm{O}(k-n)$ identifizieren.

Ein **Atlas** eines Faserbündels $p\colon E \to B$ mit typischer Faser F ist eine Familie lokaler Trivialisierungen $\{(U_i, \varphi_i\colon p^{-1}(U_i) \cong U_i \times F)\}_i$ von p derart, dass die offenen Mengen U_i die Basis B überdecken. Für zwei offene Mengen U_i, U_j der Überdeckung ist die zugehörige **Kartenwechselabbildung**

$$\varphi_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(F)$$

die zweite Komponente der Komposition $(U_i \cap U_j) \times F \xrightarrow{\varphi_j^{-1}} p^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_i} (U_i \cap U_j) \times F$.

Sei nun G eine topologische Gruppe zusammen mit einer stetigen Injektion $G \to \mathrm{Aut}(F)$. Obiger Atlas ist ein G-**Atlas**, falls alle Kartenwechselabbildungen Werte in G annehmen. Ein G-**Faserbündel** ist ein Faserbündel mit einem (maximalen) G-Atlas.

10 | Sichtwechsel

Jedes reelle Vektorbündel vom Rang r über einem topologischen Raum B definiert ein $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$-Faserbündel (mit typischer Faser $\mathbb{R}^r$) über B. Sofern auf dem Vektorbündel eine inneres Produkt existiert, können wir sogar ein $\mathrm{O}(r)$-Faserbündel (mit typischer Faser $\mathbb{R}^r$) erhalten.

Hier ist ein **inneres Produkt** auf einem Vektorbündel $p\colon E \to B$ eine stetige Abbildung $E \oplus E \to \mathbb{R}$, deren Einschränkung auf jede Faser eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf der Faser definiert.
