Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Peter Arndt

Wintersemester 2018/19
27.11.2018

Spezielle Themen der Algebra/Geometrie
Blatt 8

---

15 | Erinaceus

Auf S^n existiert für $n > 0$ genau dann ein nie-verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.

Tipp: Aus einem nie-verschwindenden Vektorfeld lässt sich eine Homotopie von der Identität auf S^n zur antipodalen Abbildung $x \mapsto -x$ konstruieren.

Sei B ein beliebiger topologischer Raum, F lokal kompakt, und G eine topologische Gruppe mit einer injektiven stetigen Abbildung $G \to \mathrm{Aut}(F)$. Wir schreiben G-FB(B) für die Menge der Isomorphieklassen von G-Faserbündeln mit Faser F über B. Für $F = \mathbb{R}^n$ und $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sind das gerade die Isomorphieklassen von Rang-n-Vektorbündeln über B; vergleiche Aufgabe 10.

Ein G-wertiger **0-Kozykel** $(\{U_i\}, \{\varphi_i\})$ über B besteht aus einer offenen Überdeckung $\{U_i\}_i$ von B zusammen mit einer Familie stetiger Abbildungen $\{\varphi_i \colon U_i \to G\}_i$.

Ein G-wertiger **1-Kozykel** $(\{U_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ über B besteht aus einer offenen Überdeckung $\{U_i\}_i$ von B zusammen mit einer Familie stetiger Abbildungen $\{\varphi_{ij} \colon U_i \cap U_j \to G\}_{ij}$, die die Kozykelbedingung $(\star)$ aus Aufgabe 12 erfüllt. Ein Kozykel $(\{V_i\}, \{\psi_{ij}\})$ ist eine **Verfeinerung** von $(\{U_i\}, \{\varphi_{ij}\})$, falls jede offene Menge V_i in einer offenen Menge $U_{k(i)}$ enthalten ist derart, dass die Einschränkung von $\varphi_{k(i)k(j)}$ auf $V_i \cap V_j$ mit ψ_{ij} übereinstimmt.

Zwei G-wertige 1-Kozykel $(\{U_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ und $(\{U'_i\}, \{\varphi'_{ij}\})$ sind **äquivalent**, „falls sie sich nur um einen Korand unterscheiden". Das heißt, wir können die Kozykel derart verfeinern, dass die beiden offenen Überdeckungen $\{U_i\}_i$ und $\{U'_i\}_i$ übereinstimmen, und es einen 0-Kozykel $(\{U_i\}, \{\varphi_i\})$ gibt, für den gilt:

$$\varphi'_{ij} = \varphi_i \varphi_{ij} \varphi_j^{-1}$$

16 | Čechische Kohomologie

Die Konstruktion aus Aufgabe (12), die einen G-wertigen 1-Kozykel in ein G-Faserbündel überführt, überführt jede Verfeinerung $(\{V_i\}, \{\psi_{ij}\})$ eines 1-Kozykels $(\{U_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ in dasselbe G-Faserbündel. Ferner werden äquivalente 1-Kozykel in isomorphe G-Faserbündel überführt. Wir erhalten so eine Bijektion:

$$\frac{\{G\text{-wertige Kozykel über } B\}}{\text{Äquivalenz}} \xrightarrow{\cong} G\text{-FB}(B)$$

Die Menge auf der linken Seite obiger Bijektion wird gewöhnlich als $\check{\mathrm{H}}^1(B; G)$ notiert und als **nicht-abelsche Čech-Kohomologie** von B mit Koeffizienten in G bezeichnet.

Abgabefrist: 04.12.2018 vor Beginn der Vorlesung