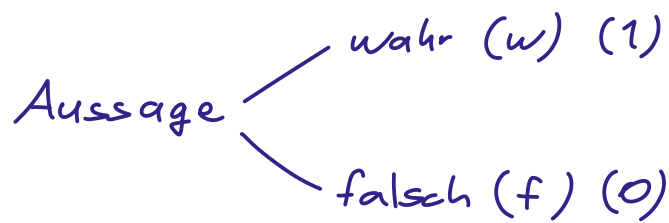


Elementare Aussagenlogik



R: Es regnet.

T: Ich träume.

M: Ich bin müde.

Verknüpfungen

und $\wedge$

X	Y	$X \wedge Y$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

$R \wedge T$: Es regnet und ich träume.

(inklusive) oder $\vee$

X	Y	$X \vee Y$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

~~Wir gehen ins Theater
oder ins Kino.~~

↑
Entweder ... oder ...

Wenn es regnet oder schneit,
bleiben wir zu Hause.

X impliziert Y

$X \Rightarrow Y$

X	Y	$X \Rightarrow Y$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

„schon wenn X , dann Y “

Bsp.: X : Ich bin müde.

Y : Ich verstehe nichts.

$X \Rightarrow Y$: Wenn ich müde bin, verstehe ich nichts.

X ist äquivalent zu Y

$X \Leftrightarrow Y$

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

„genau dann X , wenn Y “

Negation $\neg$

X	$\neg X$
w	f
f	w

wahr $\frac{T}{w}$

falsch $\frac{\perp}{f}$

Itis-Übung A1: Wenn die Sonne scheint ...

Itis-Übung A2: Teilnahme an der Logik-Vorlesung

Tautologien

Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist.

z.B. T

z.B.: $X \vee \neg X$ Hilfsspalte

X	$\neg X$	$X \vee \neg X$
w	f	w
f	w	w

z.B.: $(X \vee \neg X) \wedge \neg (X \wedge \neg X) =: \varphi$

Hilfsspalten

X	$\neg X$	$X \vee \neg X$	$X \wedge \neg X$	$\neg (X \wedge \neg X)$	φ
w	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	w

Axiom der klassischen Logik:

Für jede Aussage X gilt genau eine der Aussagen $X, \neg X$.

Dieses Axiom liegt den Wahrheitstabellen zugrunde.

Latein: „Tertium non datur“.

Äquivalente Aussagen

$X \Rightarrow Y$ hat denselben Wahrheitswert wie $\neg X \vee Y$

oder:

$X \Rightarrow Y$ ist äquivalent zu $\neg X \vee Y$

oder:

$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$ ist Tautologie

X	$\neg X$	Y	$X \Rightarrow Y$	$\neg X \vee Y$
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	w

Bsp.: X : Ich bin müde.
 Y : Ich verstehe nichts.

$X \Rightarrow Y$: Wenn ich müde bin, verstehe ich nichts.

$\neg X \vee Y$: Ich bin wach oder ich verstehe nichts.

Iltis-Übung A1: Ausfüllen von Wahrheitstabellen

$X \Rightarrow Y$ hat denselben Wahrheitswert wie $\neg Y \Rightarrow \neg X$

X	Y	$X \Rightarrow Y$	$\neg Y$	$\neg X$	$\neg Y \Rightarrow \neg X$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

- wird benutzt für „Beweis durch Kontraposition“

Beispiel: n natürliche Zahl $(0, 1, 2, \dots)$

Behauptung:

$$\underbrace{n^2 \text{ ist gerade}}_X \Rightarrow \underbrace{n \text{ ist gerade}}_Y$$

Beweis:

Durch Kontraposition reicht es zu zeigen

$$\neg Y \quad \neg X \\ \underbrace{n \text{ ungerade}} \Rightarrow \underbrace{n^2 \text{ ungerade}}$$

Sei also n ungerade. Dann gibt es eine natürliche Zahl k , sodass gilt:

$$n = 2 \cdot k + 1.$$

Also ist

$$\begin{aligned} n^2 &= (2 \cdot k + 1)^2 \\ &= 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Also ist n^2 ungerade.



$\neg(X \wedge Y)$ hat denselben Wahrheitswert wie $\neg X \vee \neg Y$

$\neg(X \vee Y)$ hat denselben Wahrheitswert wie $\neg X \wedge \neg Y$

Bsp.: $\neg(\text{Ich habe einen Bruder oder eine Schwester})$
bedeutet

Ich habe keinen Bruder und keine Schwester.

Logik-Taschenrechner: <https://live.lean-lang.org>
Beispiel-Code:

```
import Mathlib

variable (X Y : Prop) -- X und Y sind Aussagen

example : X := by
  tauto -- scheitert: X kann wahr oder falsch sein

example : (X ∨ ¬X) := by
  tauto -- Erfolg! Eine der beiden Aussagen X, ¬X gilt immer.

example : (X ∨ ¬X) ∧ ¬(X ∧ ¬X) := by
  tauto -- Erfolg! Es gilt genau einer der beiden Aussagen X, ¬X.
  -- Wir behandeln hier also klassische Logik.

example : ¬(X ∧ Y) ↔ ¬X ∧ ¬Y := by
  tauto -- scheitert

example : ¬(X ∧ Y) ↔ ¬X ∨ ¬Y := by
  tauto -- so ist es richtig
```

Quantoren

Für alle $\forall$

Es existiert
(mindestens ein) ... $\exists$

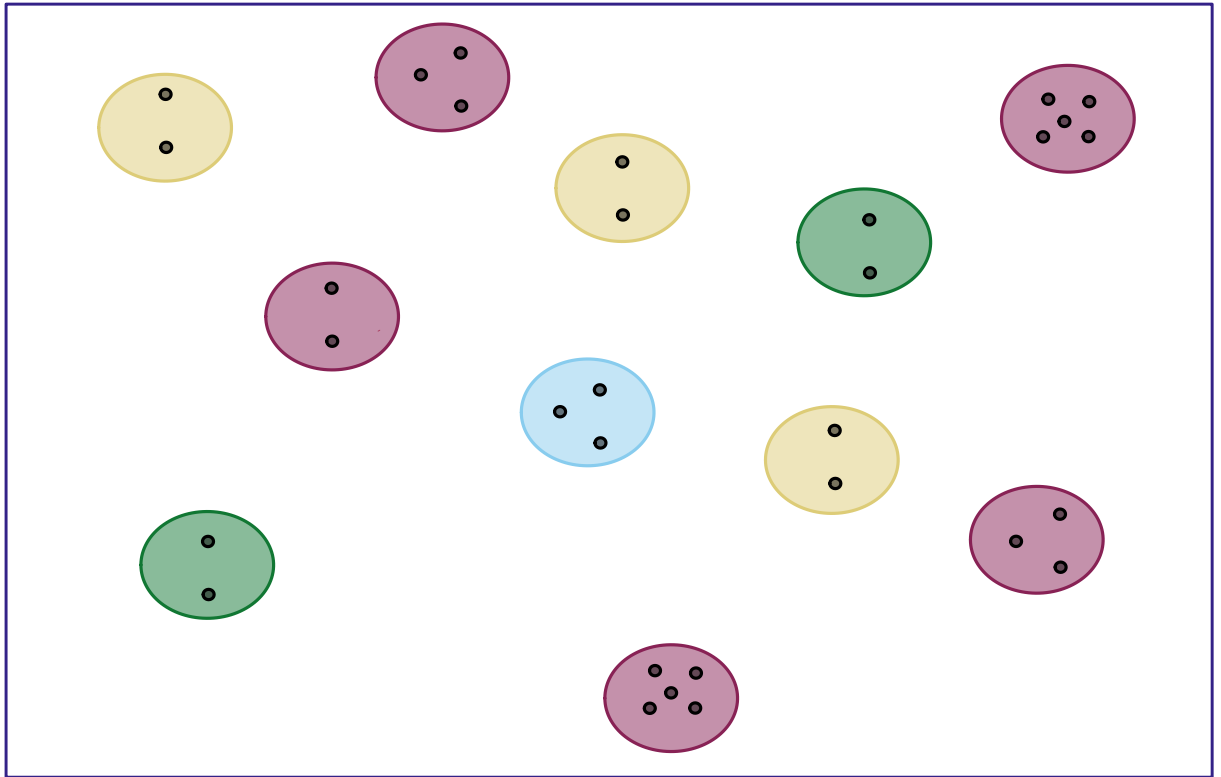
$\neg(\forall \dots : X)$ ist äquivalent zu $\exists \dots : \neg X$

$\neg(\exists \dots : X)$ ist äquivalent zu $\forall \dots : \neg X$
 $\nexists \dots : X$

Iltis-Übung C1: Erstellen von Modellen für prädikatenlogische Formeln

Iltis-Übung C1: Modellieren von Eigenschaften in Graphstrukturen

Bsp.: Vollständige Sammlung aller Marienkäfer M :



$\forall$ Marienkäfer M :

M gelb $\Rightarrow M$ hat genau 2 Punkte w

$\forall$ Marienkäfer M :

M hat genau 2 Punkte $\Rightarrow M$ gelb f

$\forall$ Marienkäfer M :

M rot $\Rightarrow M$ hat genau 5 Punkte f

$\forall$ Marienkäfer M :

M hat genau 5 Punkte $\Rightarrow M$ rot w

$\exists$ Marienkäfer M :

M gelb $\Rightarrow M$ hat genau 2 Punkte w

(„falls M gelb ist, hat M genau 2 Punkte)

wähle z. B. $M =$  oder  oder 

$\exists$ Marienkäfer M :

M rund $\Rightarrow M$ hat genau 1 Punkt f