Naïve Mengenlehre

- Menge wird definiert durch Angabe ihrer Elemente.
- Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen.

Bsp.:

Mengenklammern

$$M := \{2, -5, 8, \pi\}$$

linke Seite wird definiert als die rechte

Elemente von M

$$= \{8, \pi, 2, -5\}$$

Reihenfolge egal

$$= \{8, \pi, 2, 2, 2, 2, -5\}$$

Mehrfachnennung unerheblich

Notation: $m \in M \;:\Longleftrightarrow\;$ m ist Element von M

$m \notin M \;:\Longleftrightarrow\; \neg(m \in M)$

im Bsp. oben:

$2 \in M, \quad 8 \in M, \quad \pi \in M, \quad -5 \in M$

$7 \notin M$

weitere Beispiele für Mengen:

$\emptyset := \{\}$ leere Menge

$\mathbb{N} :=$ natürliche Zahlen

$= „\{1, 2, 3, \dots\}“$

$\mathbb{N}_0 := „\{0, 1, 2, 3, \dots\}“$

$\mathbb{Z} :=$ ganze Zahlen

$= „\{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}“$

$\mathbb{Q} :=$ rationale Zahlen (Brüche)

$= „\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}“$

mit der Eigenschaft, dass...

$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$

$\mathbb{R} :=$ reelle Zahlen $\longrightarrow$ Analysis I

Konstruktionen mit/von Mengen

Def.: M_1, M_2 Mengen

Das (kartesische) Produkt von M_1 und M_2 ist

$$M_1 \times M_2 := \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$$

Hier gilt: $(m_1, m_2) = (n_1, n_2)$

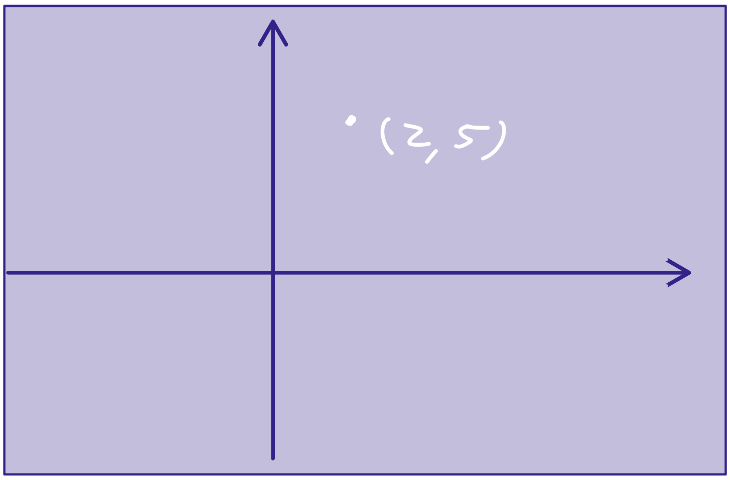
$:\Longleftrightarrow \quad m_1 = n_1$ und $m_2 = n_2$

Ist $M_1 = M_2 = M$, schreiben wir

$$M^2 := M \times M$$

Analog: $M^3, M^4, \ldots$

Beispiel: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

Standardbeispiel für Vektorraum

$\longrightarrow$ Lineare Algebra I

Beispiel: $M_1 = \{2, 3, 5\}$

$M_2 = \{4, 5, 6\}$

$$M_1 \times M_2 = \{(2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (5,4), (5,5), (5,6)\}$$

Def.: M_1, M_2 Mengen

Die **disjunkte Vereinigung / Summe** von M_1 und M_2 ist

$$M_1 \amalg M_2 := \{ (m, i) \mid i \in \{1,2\},\ m \in M_i \}$$

Bsp.: $\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}$

Elemente der Form $(x, 1)$

Elemente der Form $(x, 2)$

Bsp.:

$M_1 = \{2, 3, 5\}$

$M_2 = \{4, 5, 6\}$

unterschiedlich!

$$M_1 \amalg M_2 = \{ (2,1), (3,1), (5,1), (4,2), (5,2), (6,2) \}$$

Wenn M_1 3 Elemente und M_2 5 Elemente hat, dann hat

$M_1 \times M_2$ 15 Elemente,

$M_1 \amalg M_2$ 8 Elemente.

Teilmengen

Def.: Eine Teilmenge N einer Menge M ist eine Menge, deren Elemente allesamt in M liegen. Wir schreiben

$$N \subseteq M$$

für: N ist Teilmenge von M.

In Symbolen:
$$N \subseteq M \;:\Longleftrightarrow\; (x \in N \Rightarrow x \in M)$$
$$\Longleftrightarrow\; (\forall x \in N: \quad x \in M)$$

$$N \nsubseteq M \;:\Longleftrightarrow\; \neg\,(N \subseteq M)$$
$$\Longleftrightarrow\; \neg\,(\forall x \in N: \quad x \in M)$$
$$\Longleftrightarrow\; \exists x \in N: \;\neg\,(x \in M)$$
$$\Longleftrightarrow\; \exists x \in N: \quad x \notin M$$

Beispiele:
$$\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\{2, -5, 8, \pi\} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\{2, -5, 8, \pi\} \nsubseteq \mathbb{Z}$$
$$\pi \notin \mathbb{Z}$$

Konstruktion von/mit Teilmengen

Def.: M Menge
E Eigenschaft, die Elemente von M haben können (oder auch nicht)

Dann ist

$$\{ m \in M \mid m \text{ hat Eigenschaft } \underline{E} \}$$

die Teilmenge derjenigen Elemente von M, die die Eigenschaft $\underline{E}$ besitzen.

Beispiel:

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade} \} = \{ 2, 4, 6, \dots \}$$

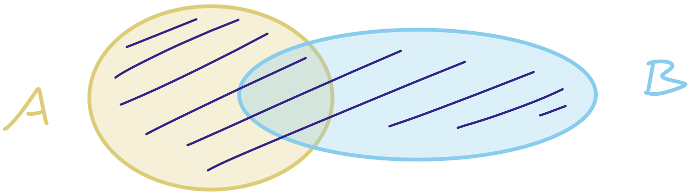
$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade} \} = \{ 1, 3, 5, \dots \}$$

Def.: M Menge

$A, B, C \subseteq M$

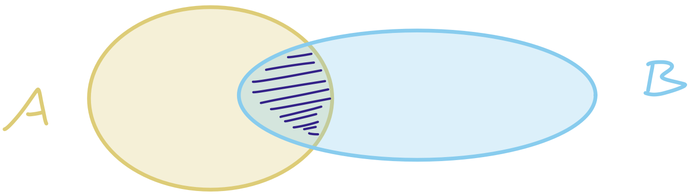
$$A \cup B := \{ m \in M \mid m \in A \vee m \in B \}$$

Vereinigung



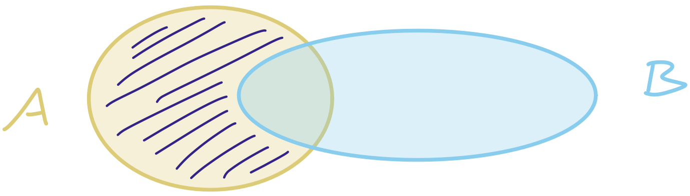
$$A \cap B := \{ m \in M \mid m \in A \wedge m \in B \}$$

Schnitt



$$A \setminus B := \{ m \in M \mid m \in A \wedge m \notin B \}$$

Differenz



$M \setminus B$

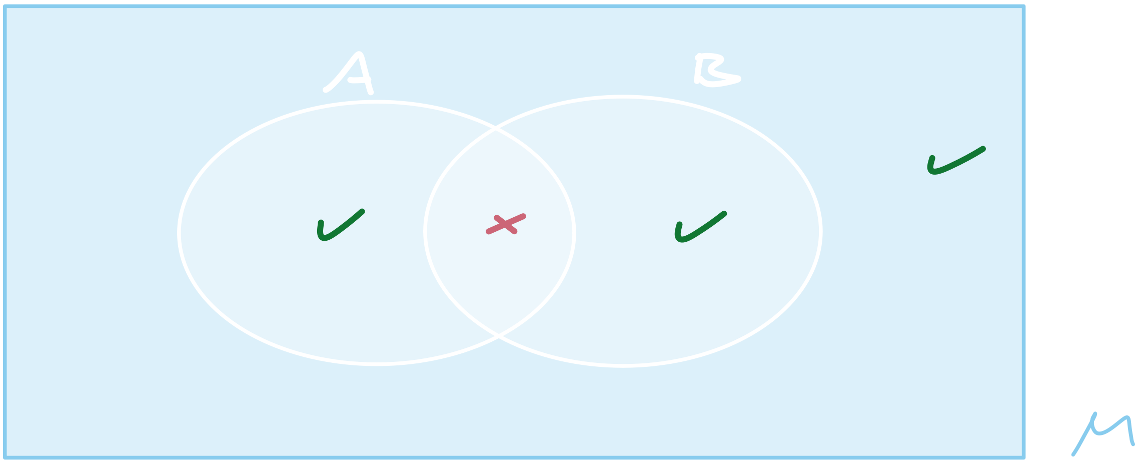
Komplement von B in M

Satz (de-Morgansche Regel)

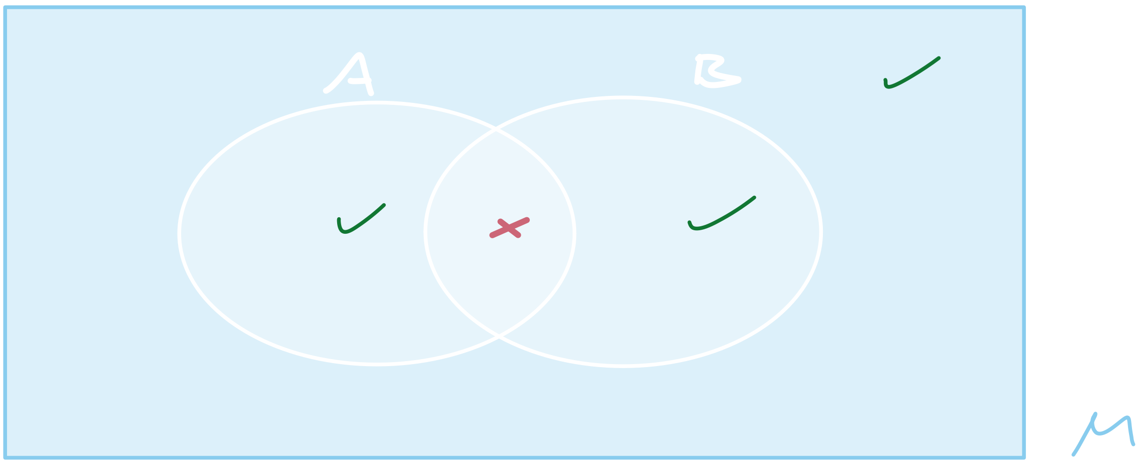
$$M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

graphischer Beweis:

linke Seite:



rechte Seite:



logische Beweis:

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen. Also müssen wir zeigen:

$$m \in M \setminus (A \cap B) \iff m \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

Das prüfen wir nach:

$$\begin{aligned}
m \in M \setminus (A \cap B) &\overset{\text{Def. } \setminus}{\iff} m \in M \wedge m \notin A \cap B \\
&\iff m \in M \wedge \neg(m \in A \cap B) \\
&\iff m \in M \wedge \neg(m \in A \wedge m \in B) \\
&\iff m \in M \wedge (\neg(m \in A) \vee \neg(m \in B)) \\
&\iff (m \in M \wedge \neg(m \in A)) \\
&\qquad \vee (m \in M \wedge \neg(m \in B)) \\
&\iff (m \in M \wedge (m \notin A)) \\
&\qquad \vee (m \in M \wedge (m \notin B)) \\
&\overset{\text{Def. } \setminus}{\iff} m \in M \setminus A \\
&\qquad \vee \quad m \in M \setminus B \\
&\overset{\text{Def. } \cup}{\iff} m \in (M \setminus A) \cup (M \setminus B)
\end{aligned}$$

$$X \wedge (Y \vee Z) \iff (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$$

$\square$

Teilmengen-Taschenrechner:

https://live.lean-lang.org/

```
import Mathlib

variable (M : Type)      -- M ist eine Menge
variable (A B C : Set M) -- A, B, C sind Teilmengen von M


example : (A ∩ B) ∪ C = (A ∪ C) ∩ (B ∪ C) := by
  grind -- keine Fehlermeldung, also Gleichheit verifiziert

example : C \ (A ∩ B) = C \ A ∪ C \ B := by
  grind -- keine Fehlermeldung, also Gleichheit verifiziert

example : C \ (A ∩ B) = (C \ A) ∩ (C \ B) := by
  grind  -- Fehlermeldung, Gleichheit wahrscheinlich i.A. nicht gegeben

example : (A ∩ B) \ C = (A \ C) ∩ (B \ C) := by
  grind  -- keine Fehlermeldung, also Gleichheit verifiziert
         -- eingegeben & angezeigt wird sehr kurze Beweisskizze!

example : (A ∩ B) \ C = (A \ C) ∩ (B \ C) := by
         -- Dieseble Aussage noch einmal, mit etwas ausführlicherer Beweisskizze:
  ext x  -- 1. zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben
  simp   -- 2. Definitionen aufdröseln
  tauto  -- 3. Wahrheitstabelle
         -- keine Fehlermeldung, also Gleichheit verifiziert
```