Mächtigkeit („Größe") von Mengen

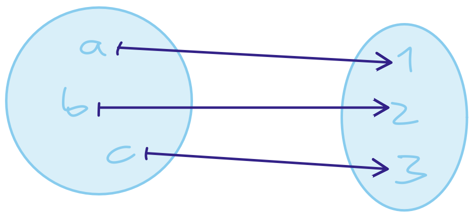
Def.: M, N Mengen

M und N sind **gleichmächtig**, wenn sich jedem Element von M genau ein Element von N so zuordnen lässt, dass jedem Element von N genau ein Element von M zugeordnet ist.

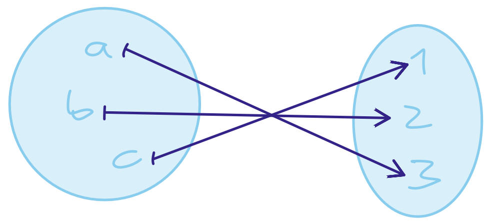
Eine solche Zuordnung heißt **Bijektion** von M nach N.

Notation: $M \cong N$ oder $|M| = |N|$

Bsp.: $\{a, b, c\} \cong \{1, 2, 3\}$

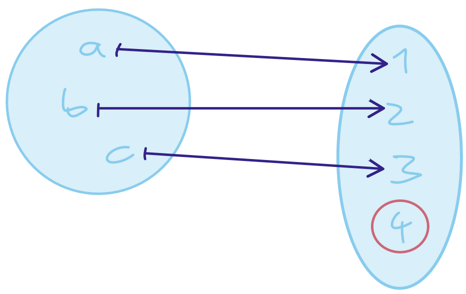


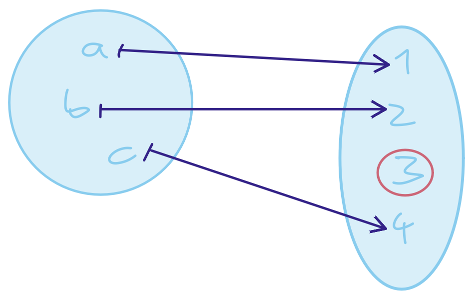
oder



oder ...

Bsp.: $\{a, b, c\} \not\cong \{1, 2, 3, 4\}$

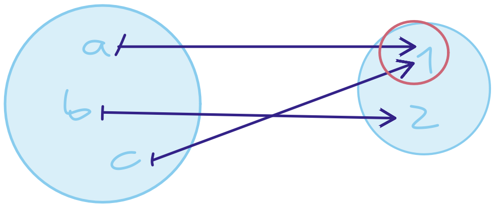


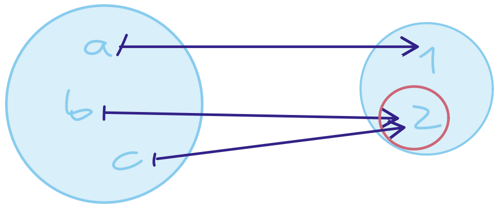


...

– Egal, welche Zuordnung man wählt, verbleibt immer mindestens eine Zahl, der kein Buchstabe zugeordnet wird.

Bsp.: $\{a, b, c\} \not\cong \{1, 2\}$





. . .

- Egal, welche Zuordnung man wählt, gibt es immer mindestens eine Zahl, der mehr als ein Buchstabe zugeordnet wird.

Bsp.: M_1, M_2 Mengen

$$M_1 \times M_2 \cong M_2 \times M_1$$
$$(m_1, m_2) \mapsto (m_2, m_1)$$

Bsp.: $\mathbb{N}_0 \cong \mathbb{N}$

z.B. $n \mapsto n+1$

$(m-1 \mapsto m)$

Bsp.: $\mathbb{N}_0 \cong \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$

z.B. $n \mapsto 2 \cdot n$

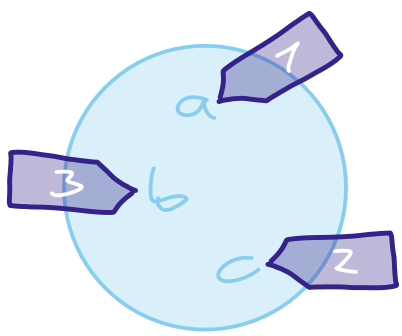
Bsp.: $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\} \cong \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$

z.B. $n \mapsto n-1$

Wir können uns eine Bijektion von M nach N auch so vorstellen, dass wir für Elemente von M Elemente von N als Beschriftung auswählen, und zwar so, dass gilt:

- jedes Element von M ist mit genau einem Element von N beschriftet
- die Beschriftung ist eindeutig: Elemente von M lassen sich anhand ihrer Beschriftung unterscheiden
- jedes Element von N kommt als Beschriftung vor.

Bsp.: $\{a, b, c\} \cong \{1, 2, 3\}$



oder einfach: $\underset{1}{a} \quad \underset{2}{b} \quad \underset{3}{c}$

Def.: M Menge

Wir nennen M **endlich**, falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $M \cong \{1, \dots, n\}$.

Notation in diesem Fall:

$$|M| = 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad M = \emptyset$$
$$|M| = n \quad :\Longleftrightarrow \quad M \cong \{1, \dots, n\}.$$

Wir nennen M **abzählbar unendlich**, falls $M \cong \mathbb{N}$.

Falls auch dies nicht der Fall ist, nennen wir M **überabzählbar unendlich**

Bsp.: $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\} \cong \mathbb{N}$

Bsp.: $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ prim}\} \cong \mathbb{N}$ (Euklid)

$$\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$$
$$n \mapsto \begin{cases} 2 \cdot n & \text{falls } n > 0 \\ 2 \cdot |n| + 1 & \text{falls } n \leq 0 \end{cases}$$

...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
	11	9	7	5	3	1	2	4	6	8	10	

Bsp.: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

$$
\begin{array}{ccccc}
(1,1)_1 & (1,2)_2 & (1,3)_4 & (1,4)_7 & \cdots \\
(2,1)_3 & (2,2)_5 & (2,3)_8 & (2,4) & \cdots \\
(3,1)_6 & (3,2)_9 & (3,3) & (3,4) & \cdots \\
 & & & \text{usw.} & \\
(4,1)_{10} & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Bsp.: $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$

Bsp.: $\{ q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \} \cong \mathbb{N}$

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1}\,_1 & \frac{1}{2}\,_2 & \frac{1}{3}\,_4 & \frac{1}{4}\,_6 & \cdots \\
\frac{2}{1}\,_3 & \cancel{\frac{2}{2}} & \frac{2}{3}\,_7 & \cancel{\frac{2}{4}} & \cdots \\
\frac{3}{1}\,_5 & \frac{3}{2}\,_8 & \cancel{\frac{3}{3}} & \frac{3}{4} & \cdots \\
\frac{4}{1}\,_9 & \cancel{\frac{4}{2}} & \frac{4}{3} & \cancel{\frac{4}{4}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Satz (Cantor): $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{N}$

Beweis: durch Widerspruch. Wir nehmen also $\mathbb{R} \cong \mathbb{N}$ und folgern hieraus eine Aussage, die falsch ist / im Widerspruch zur Annahme steht.

Nach Annahme existiert eine mit $\mathbb{N}$ durchnummerierte Liste aller reellen Zahlen:

$$\begin{array}{llllllll}
1 & \ldots, & \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \ldots \\
2 & \ldots, & a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \ldots \\
3 & \ldots, & a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \ldots \\
4 & \ldots, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} & a_{45} & a_{46} \ldots \\
5 & \vdots & \vdots & \vdots & & & \boxed{\vdots} & \vdots \\
6 & & & & & & & \boxed{} \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}$$

$a_{ij} \in \{0, \ldots, 9\}$

Definiere reelle Zahl x wie folgt:

$$= 0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \ldots$$

mit $$x_i := \begin{cases} 5 & \text{falls } a_{ii} \neq 5 \\ 3 & \text{falls } a_{ii} = 5 \end{cases}$$

Dann ist x ungleich der i-ten Zahl in meiner Liste (für jedes $i \in \mathbb{N}$).
(x unterscheidet sich von der i-ten Zahl in der i-ten Nachkommastelle.)

(z. B.:

$$\begin{array}{llllllllll}
1 & 173, & \boxed{4} & 3 & 8 & 0 & 9 & 2 & 7 & \ldots \\
2 & 3, & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
3 & -2, & 5 & 5 & \boxed{3} & 1 & 1 & 3 & 9 & \ldots \\
4 & -1, & 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
5 & 13, & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & \ldots \\
6 & 555, & 6 & 3 & 9 & 7 & 3 & \boxed{3} & 3 & \ldots \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

$x = 0{,}5\ 5\ 5\ 3\ 5\ 5$)

Also steht x nicht auf meiner Liste ↯.

Also muss die Annahme $\mathbb{R} \cong \mathbb{N}$ falsch gewesen sein. $\square$

Bsp.: $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots}_{\mathbb{N} \text{ Faktoren}} \not\cong \mathbb{N}$

$\overset{\in}{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots)}$

Bsp.: $\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots}_{\mathbb{N} \text{ Faktoren}} \not\cong \mathbb{N}$

– argumentiere genau wie bei $\mathbb{R}$!

Hausaufgabe: Hilberts Hotel

https://www.youtube.com/watch?v=OxGsU8oIWjY