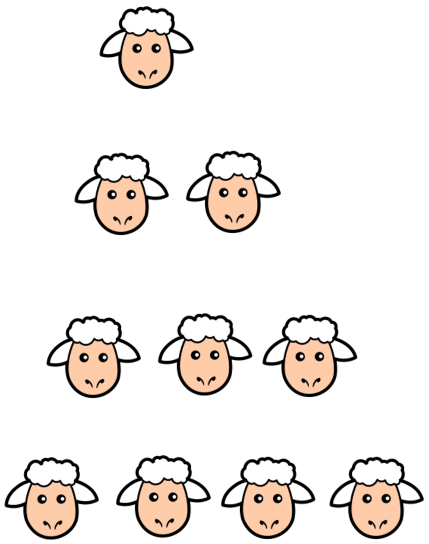
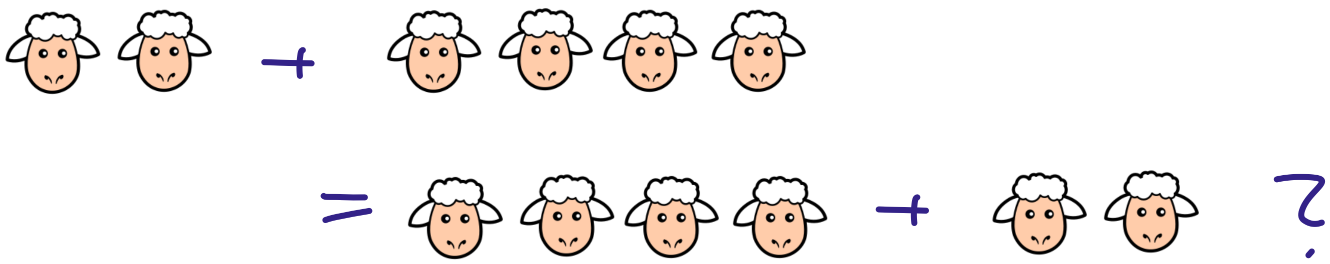
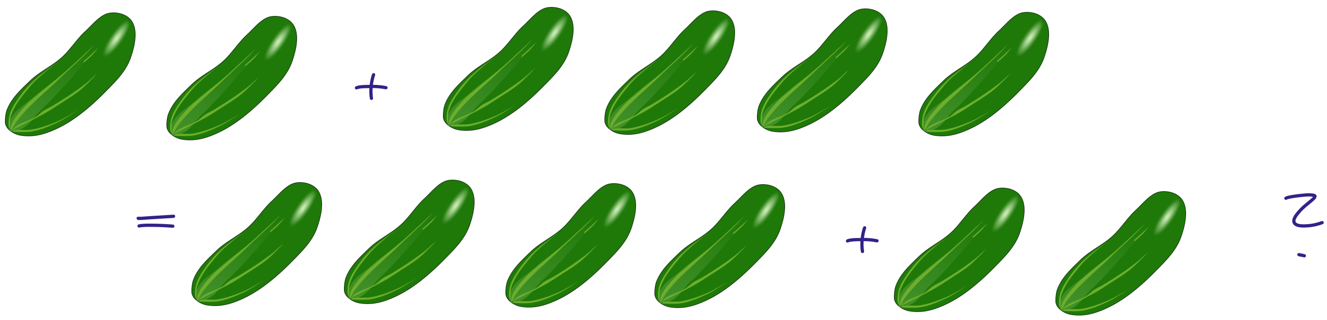
Abstraktion

A: Natürliche Zahlen







Peano-Axiome

(a) 1 ist eine natürliche Zahl $\quad (1 \in \mathbb{N})$

(b) Jede natürliche Zahl n hat genau eine Nachfolger n'

(c) 1 ist kein Nachfolger

(d) Jede natürliche Zahl $\neq 1$ ist Nachfolger von genau einer natürlichen Zahl

(e) Jede Menge natürlicher Zahlen, die 1 enthält und zu jeder Zahl n auch ihren Nachfolger n', ist bereits gleich $\mathbb{N}$.

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ soll also gelten:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in M \\ \wedge \left(\forall n \in \mathbb{N}: \; n \in M \Rightarrow n' \in M\right) \end{array}\right\} \Rightarrow M = \mathbb{N}$$

Axiom (e) erlaubt rekursive Definitionen: um einen Ausdruck $X(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu definieren, reicht es,

- $X(1)$ zu definieren, und
- $X(n')$ durch $X(n)$ auszudrücken.

Bsp.: Um für $m \in \mathbb{N}$ die Summe $\underbrace{m+n}_{X(n)}$ zu definieren, reicht:

- $m+1 := m'$
- $\underbrace{m+n'}_{X(n')} := (\underbrace{m+n}_{X(n)})'$

Axiom (e) erlaubt auch vollständige Induktion: Um eine Aussage $X(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, reicht es, zu zeigen:

- $X(1)$
- $X(n) \Rightarrow X(\underbrace{n+1}_{=n',\ \text{siehe oben}})$

Wir können hiervon ausgehend systematisch Addition, Multiplikation usw. einführen und Eigenschaften beweisen, z. B.:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}: \quad n+m = m+n$$

→ Natural Number Game

https://adam.math.hhu.de/#/g/leanprover-community/nng4

Beispiel für Induktionsbeweis:

Satz (Gaußsche Summenformel):
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis:

Aussage gilt für $n = 1$

Induktionsanfang: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ✓

Aussage gilt für ein n

Induktionsvoraussetzung:

(IV) $$1 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Zeige unter Annahme der Induktionsvor., dass Aussage auch für $n+1$ gilt

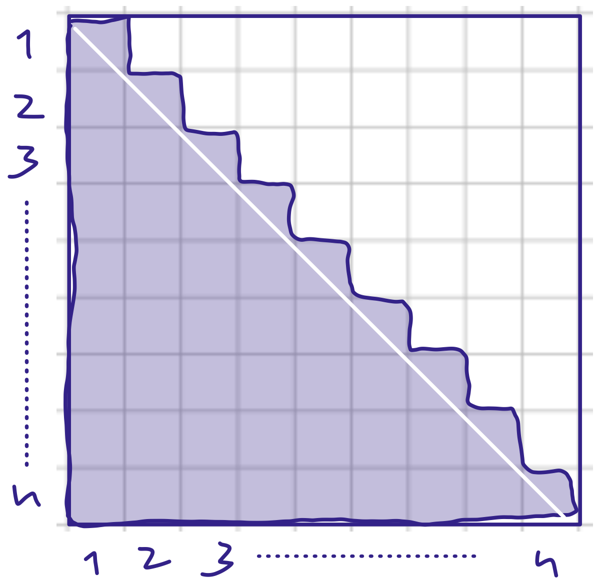
Induktionsschritt:

zz: $$1 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Das können wir nachrechnen:

$$\begin{aligned} 1 + \dots + (n+1) &= (1 + \dots + n) + (n+1) \\ &\overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \end{aligned}$$

$\square$



unterhalb der Diagonale: $\frac{1}{2} \cdot n^2$ Blöcke

oberhalb der Diagonale: $n \cdot \frac{1}{2}$ Blöcke

in Summe: $\frac{1}{2} n^2 + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Beispiel für Induktionsbeweis:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+\ldots+n)^2 = 1^3+\ldots+n^3$$

Beweis:

Aussage gilt für $n=1$

Induktionsanfang:

zz: $1^2 = 1^3$ ✓

Aussage gilt für ein n

Induktionsvoraussetzung:

(IV) $(1+\ldots+n)^2 = 1^3+\ldots+n^3$

Zeige unter Annahme der Induktionsvor., dass Aussage auch für $n+1$ gilt

Induktionsschritt:

zz: $(1+\ldots+(n+1))^2 = 1^3+\ldots+(n+1)^3$

In diesem Fall können wir das wie folgt nachrechnen:

$$(1+\ldots+(n+1))^2 = ((1+\ldots+n)+(n+1))^2$$

$$= (1+\ldots+n)^2 + 2\cdot(1+\ldots+n)\cdot(n+1) + (n+1)^2$$

IV einsetzen

$$= 1^3+\ldots+n^3 + 2\cdot\boxed{(1+\ldots+n)}\cdot(n+1) + (n+1)^2$$

Gaußsche Summenformel

$$= 1^3+\ldots+n^3 + \cancel{2}\cdot\boxed{\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}}\cdot(n+1) + (n+1)^2$$

$$= 1^3 + \ldots + n^3 + n \cdot (n+1)^2 + 1 \cdot (n+1)^2$$

$$= 1^3 + \ldots + n^3 + (n+1) \cdot (n+1)^2$$

$$= 1^3 + \ldots + (n+1)^3 \qquad \square$$

B: Gruppen

$(\mathbb{Z},+)$ $\quad 5+(-5)=0$

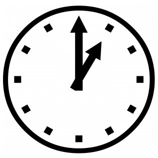
$\quad 7+0=7$

$(\mathbb{R},+)$ $\quad \pi+(-\pi)=0$

$\quad \sqrt{2}+0=\sqrt{2}$

$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ $\quad \pi\cdot\pi^{-1}=1$

$\quad 3{,}5\cdot 1=3{,}5$

( , +)

$6+6=12=0$

$6+(-6)=0$

$7+0=7$

Def.: Eine **Gruppe** ist eine Menge M zusammen mit einer Verknüpfung $*$, die aus je zwei Elementen $x,y\in M$ ein neues Element $x*y\in M$ produziert derart, dass gilt:

(a) $\forall x,y,z\in M: \quad (x*y)*z = x*(y*z)$

Ferner soll es ein Element $e\in M$ geben derart, dass gilt:

(b_1) $\forall x\in M: \quad e*x = x$

(b_2) $\forall x\in M: \quad x*e = x$

Schließlich soll zu jedem $x\in M$ ein $x'\in M$ existieren, für das gilt:

(c_1) $\quad x*x' = e$

(c_2) $\quad x'*x = e$

Hilfe!

Das ist so abstrakt!!!

Keine Panik! Damit kann man arbeiten.
Das ist sogar einfacher, als Sie denken, denn Sie werden nicht durch unnötige Wolle abgelenkt.

z. B.:

Behauptung: Das Element „e" in einer Gruppe ist eindeutig.

Beweis:

Sei $f \in M$ ein weiteres Element mit den Eigenschaften (b_1) und (b_2), also:

$$\forall x \in M: \quad f * x = x$$
$$\text{und } \forall x \in M: \quad x * f = x$$

(b_1) für e $\qquad$ (b_2) für f

$$f \overset{(b_1)}{=} e * f \overset{(b_2)}{=} e$$

Also ist $f = e$. $\square$

z. B.:

Behauptung: Für jedes $x \in M$ ist das zugehörige Element x' eindeutig.

Beweis:

Sei $x \in M$ beliebig, $x' \in M$ mit

$$(c_1) \qquad x * x' = e$$
$$(c_2) \qquad x' * x = e$$

Sei $\tilde{x}$ weiteres Element mit diesen Eigenschaften, also

$$(\tilde{c}_1) \qquad x * \tilde{x} = e$$
$$(\tilde{c}_2) \qquad \tilde{x} * x = e$$

Also ist

$$\begin{aligned} \tilde{x} \overset{b_2}{=} \tilde{x} * e &\overset{c_1}{=} \tilde{x} * (x * x') \\ &\overset{a}{=} (\tilde{x} * x) * x' \\ &\overset{\tilde{c}_2}{=} e * x' \\ &\overset{b_1}{=} x' \end{aligned}$$

$\square$

C: Vektorräume

Hausaufgabe: Video „Abstract vector spaces"

https://www.youtube.com/watch?v=TgKwz5Ikpc8

Warum führen Mathematiker Beweise?

Warum führen wir Ihnen im Studium so viele Beweise vor?

→ Weil wir glauben, das dies den Beste Weg ist, Sie mit abstrakten Strukturen vertraut zu machen.

Jeder lesbare Beweis ist nur eine Skizze: eine Anleitung, wie sich ein Beweis konstruieren lässt. Solche Anleitung muss man sehr langsam lesen.