

SPC onderwerp: Quaternionen en kegelsneden

Dit onderwerp is geïnspireerd door mijn bachelorscriptie, geschreven in het voorjaarssemester van 2022, en is geschikt voor een student met aanzienlijke affiniteit met algebra. Als voorkennis is in ieder geval algebra 2 nodig. Kennis van meetkunde is denk ik een stuk minder van belang.

Zij k een lichaam van karakteristiek ongelijk 2. Laat a en b eenheden in k zijn, en bekijk de k -algebra $(a, b)_k$ voortgebracht door i en j met de relaties

$$i^2 = a, j^2 = b, ij = -ji.$$

We noemen $(a, b)_k$ een *quaternionenalgebra*, ook wel een *gegeneraliseerde quaternionenalgebra* wanneer men de naam quaternionenalgebra reserveert voor het klassieke geval $k = \mathbb{R}$ en $a = b = -1$. Voor $a = b = 1$ vinden we een isomorfisme

$$(a, b)_k \xrightarrow{\cong} M_2(k) \\ i \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

met $M_2(k)$ de algebra van 2×2 -matrices over k . Wanneer de algebra $(a, b)_k$ isomorf is met $M_2(k)$ zeggen we ook wel dat de algebra $(a, b)_k$ *splitst*.

Aan het paar (a, b) associëren we ook de kegelsnede $C(a, b)$ over k gegeven door de vergelijking

$$ax^2 + by^2 = z^2.$$

Deze kegelsnede leeft uiteraard in het projectieve vlak $\mathbb{P}_k^2$, maar ik vermoed dat de student dit project kan ondernemen zonder enige kennis van projectieve meetkunde.

Er blijkt een nauw verband te bestaan tussen de algebra $(a, b)_k$ en de kegelsnede $C(a, b)$.

Stelling 1 *De algebra $(a, b)_k$ splitst dan en slechts dan als de kegelsnede $C(a, b)$ een k -rationaal punt heeft. Met andere woorden, als de vergelijking*

$$ax^2 + by^2 = 1$$

een oplossing heeft met $x, y \in k$.

Stelling 2 *De algebra's $(a, b)_k$ en $(c, d)_k$ zijn isomorf dan en slechts dan als de kegelsneden $C(a, b)$ en $C(c, d)$ dat zijn.*

Een voordracht/artikel over dit onderwerp kan een boel kanten op. Stelling 1 valt denk ik te bewijzen in een voordracht. De implicatie “ $\Rightarrow$ ” in stelling 2 valt te doen. De andere implicatie vereist meer kennis van algebraïsche meetkunde, zoals in het vak algebraic curves, en zal zeker onmogelijk zijn voor een voordracht. Er valt ook al wel een voordracht te vullen met eenvoudigere vragen over quaternionen: wanneer zijn het bijvoorbeeld delingsringen? De voornaamste verwijzing voor dit onderwerp is het eerste hoofdstuk van het boek van Gille en Szamuely [GS06]. Hoofdstuk 7, paragraaf 1, uit mijn bachelorscriptie [Zoc22] bekijkt stellingen 1 en 2 vanuit een heel ander perspectief. Hier kan de student ook een blik op werpen.

Referenties

- [GS06] Philippe Gille en Tamás Szamuely. *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 101. Cambridge University Press, 2006.
- [Zoc22] Hugo Zock. *Twists*. Leiden, 2022.